メイン講義

スタディサプリ 共通テスト直前対策講座 数学ⅠＡについて

この講座は，大学入学共通テストおよびセンター試験の「過去問題」を通じて，みなさんの実力をチェックし，底上げをするというコンセプトで作りました。この講座を見る頃は，おそらくほぼ全員の人が共通テストの過去問題を解いたことがあるでしょう。では, 今一度，次のことを思い返してください。

・いつその過去問題を解きましたか？　まだ実力が伴っていない時期ではないですか？
・どのようなやり方で解きましたか？　今でも同じ解法を取りますか？
・解き直しをしましたか？　それぞれの大問は最後まで解き切りましたか？

１つでも「あ……」と思った人，この講座は，そんなあなたのためにあります。

あなたの「今の」実力が，大学入学共通テストがあなたに要求している資質・能力に対し，どこまで到達していて，どの部分が上回っているのか，または下回っているのか，あなたの予習と動画講義を通じてチェックすることで，あなたの実力が分野毎に整理されます。到達している，または上回っていれば，あとは演習あるのみ，そうでなければ，各分野を見直す最後のチャンスです。

直前期だからこそできる，「あなたの課題」の発見と克服。この講座に，得点アップのカギが隠されています。あなたならではのそのカギを発見してください。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講　式と計算・図形と計量
第２講　関数・データの分析
第３講　場合の数と確率
第４講　整数の性質
第５講　図形の性質

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから動画講義に臨んでください。講義は予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　式と計算・図形と計量

1

〔１〕 $(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=$ アイ であるから，$19-5\sqrt{13}$ は正の実数である。

$19+5\sqrt{13}$ の正の平方根を α とし，$19-5\sqrt{13}$ の正の平方根を β とする。このとき

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{ウエ}},\quad \alpha\beta=\boxed{\text{オ}}$$

であり

$$(\alpha+\beta)^2=\boxed{\text{カキ}},\quad (\alpha-\beta)^2=\boxed{\text{クケ}}$$

である。したがって

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}+\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

$$\beta=\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}-\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

（次ページに続く。）

〔2〕 a, b を定数とするとき，x についての不等式

$$|ax-b-7|<3 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) $a=-3$, $b=-2$ とする。①を満たす整数全体の集合を P とする。この集合 P を，要素を書き並べて表すと

$P=\{$ アイ , ウエ $\}$

となる。ただし，アイ ，ウエ の解答の順序は問わない。

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。

(i) $b=1$ のとき，①を満たす整数は全部で オ 個である。

(ii) ①を満たす整数が全部で (オ $+1$) 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは カ である。

2

〔1〕 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて7ページの三角比の表を用いてもよい。

火災時に，ビルの高層階に取り残された人を救出する際，はしご車を使用することがある。

図1のはしご車で考える。はしごの先端をA，はしごの支点をBとする。はしごの角度（はしごと水平面のなす角の大きさ）は75°まで大きくすることができ，はしごの長さABは35mまで伸ばすことができる。また，はしごの支点Bは地面から2mの高さにあるとする。

以下，はしごの長さABは35mに固定して考える。また，はしごは太さを無視して線分とみなし，はしご車は水平な地面上にあるものとする。

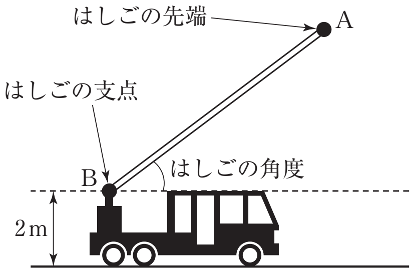


図　1

(1) はしごの先端Aの最高到達点の高さは，地面から **アイ** mである。小数第1位を四捨五入して答えよ。

（次ページに続く。）

(2) 図1のはしごは，図2のように，点Cで，ACが鉛直方向になるまで下向きに屈折させることができる。ACの長さは10mである。

図3のように，あるビルにおいて，地面から26mの高さにある位置を点Pとする。障害物のフェンスや木があるため，はしご車をBQの長さが18mとなる場所にとめる。ここで，点Qは，点Pの真下で，点Bと同じ高さにある位置である。

このとき，はしごの先端Aが点Pに届くかどうかは，障害物の高さや，はしご車と障害物の距離によって決まる。そこで，このことについて，後の(i)，(ii)のように考える。

ただし，はしご車，障害物，ビルは同じ水平な地面上にあり，点A，B，C，P，Qはすべて同一平面上にあるものとする。

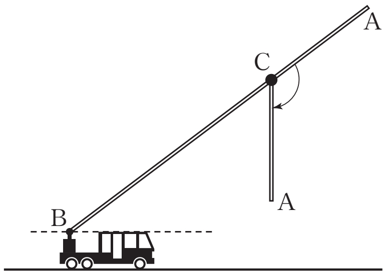


図　2

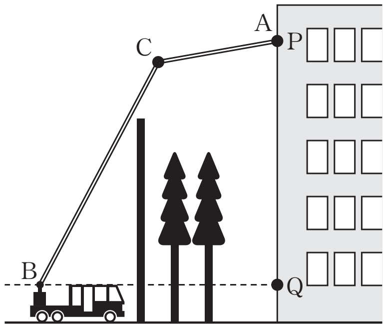


図　3

(i) はしごを点Cで屈折させ，はしごの先端Aが点Pに一致したとすると，∠QBCの大きさはおよそ ウ °になる。

ウ については，最も適当なものを，次の⓪～⑥のうちから一つ選べ。

⓪ 53	① 56	② 59	③ 63
④ 67	⑤ 71	⑥ 75	

(次ページに続く。)

(ii) はしご車に最も近い障害物はフェンスで，フェンスの高さは7m以上あり，障害物の中で最も高いものとする。フェンスは地面に垂直で2点B，Qの間にあり，フェンスとBQとの交点から点Bまでの距離は6mである。また，フェンスの厚みは考えないとする。

このとき，次の⓪～⑥のフェンスの高さのうち，図3のように，はしごがフェンスに当たらずに，はしごの先端Aを点Pに一致させることができる最大のものは，［エ］である。

［エ］の解答群

⓪ 7m	① 10m	② 13m	③ 16m
④ 19m	⑤ 22m	⑥ 25m	

（次ページに続く。）

三角比の表

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	―

（次ページに続く。）

〔2〕 三角形は，与えられた辺の長さや角の大きさの条件によって，ただ一通りに決まる場合や二通りに決まる場合がある。

以下，△ABC において AB＝4 とする。

(1) AC＝6，$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$ とする。このとき，BC＝ ア であり，△ABC はただ一通りに決まる。

(2) $\sin\angle BAC=\dfrac{1}{3}$ とする。このとき，BC の長さのとり得る値の範囲は，点 B と直線 AC との距離を考えることにより，$BC\geqq\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である。

$BC=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ または BC＝ エ のとき，△ABC はただ一通りに決まる。

また，∠ABC＝90° のとき，$BC=\sqrt{\boxed{オ}}$ である。

（次ページに続く。）

したがって，△ABC の形状について，次のことが成り立つ。

・$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}<\text{BC}<\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ のとき，△ABC は $\boxed{\text{カ}}$。

・$\text{BC}=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ のとき，△ABC は $\boxed{\text{キ}}$。

・$\text{BC}>\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ かつ $\text{BC}\neq\boxed{\text{エ}}$ のとき，△ABC は $\boxed{\text{ク}}$。

$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　ただ一通りに決まり，それは鋭角三角形である
①　ただ一通りに決まり，それは直角三角形である
②　ただ一通りに決まり，それは鈍角三角形である
③　二通りに決まり，それらはともに鋭角三角形である
④　二通りに決まり，それらは鋭角三角形と直角三角形である
⑤　二通りに決まり，それらは鋭角三角形と鈍角三角形である
⑥　二通りに決まり，それらはともに直角三角形である
⑦　二通りに決まり，それらは直角三角形と鈍角三角形である
⑧　二通りに決まり，それらはともに鈍角三角形である

3

a を定数とする。実数 x に関する二つの条件 p，q を次のように定める。

p：$-1 \leqq x \leqq 3$

q：$|x-a|>3$

条件 p，q の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$ で表す。

(1)　命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるような a の値の範囲は

$a<$ **アイ** ，　**ウ** $<a$

である。

(2)　$a=$ ウ のとき，$x=$ **エ** は命題「$p \Longrightarrow q$」の反例である。

（次ページに続く。）

(3)　実数 x に関する条件 r を次のように定める。

$r：3<x\leqq 4$

次の［オ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

$a=1$ のとき，条件「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」は条件 r であるための［オ］。

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない

①　十分条件であるが，必要条件ではない

②　必要十分条件である

③　必要条件でも十分条件でもない

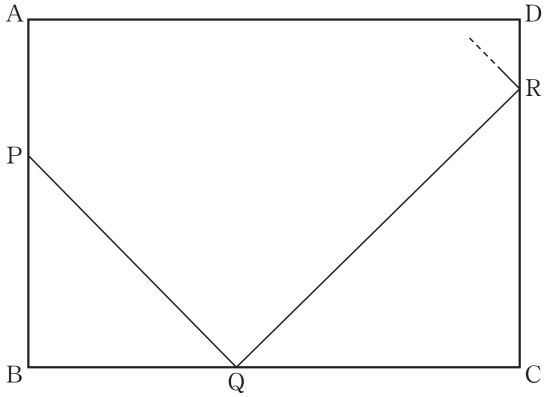
第２講　関数・データの分析

1　a を $5<a<10$ を満たす実数とする。長方形 ABCD を考え，AB＝CD＝5，BC＝DA＝a とする。

次のようにして，長方形 ABCD の辺上に 4 点 P，Q，R，S をとり，内部に点 T をとることを考える。

辺 AB 上に点 B と異なる点 P をとる。辺 BC 上に点 Q を ∠BPQ が 45° になるようにとる。Q を通り，直線 PQ と垂直に交わる直線を ℓ とする。ℓ が頂点 C，D 以外の点で辺 CD と交わるとき，ℓ と辺 CD の交点を R とする。

点 R を通り ℓ と垂直に交わる直線を m とする。m と辺 AD との交点を S とする。点 S を通り m と垂直に交わる直線を n とする。n と直線 PQ との交点を T とする。



参考図

（次ページに続く。）

(1)　$a=6$ のとき，ℓ が頂点 C，D 以外の点で辺 CD と交わるときの AP の値の範囲は $0 \leqq \mathrm{AP} < \boxed{\text{ア}}$ である。このとき，四角形 QRST の面積の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

$a=8$ のとき，四角形 QRST の面積の最大値は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(2)　$5<a<10$ とする。ℓ が頂点 C，D 以外の点で辺 CD と交わるときの AP の値の範囲は

$$0 \leqq \mathrm{AP} < \boxed{\text{キク}} - a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である。

点 P が①を満たす範囲を動くとする。四角形 QRST の面積の最大値が $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となるときの a の値の範囲は

$$5 < a \leqq \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

a が $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} < a < 10$ を満たすとき，P が①を満たす範囲を動いたときの四角形 QRST の面積の最大値は

$$\boxed{\text{シス}}\,a^2 + \boxed{\text{セソ}}\,a - \boxed{\text{タチツ}}$$

である。

2 花子さんと太郎さんのクラスでは，文化祭でたこ焼き店を出店することになった。二人は１皿あたりの価格をいくらにするかを検討している。次の表は，過去の文化祭でのたこ焼き店の売り上げデータから，１皿あたりの価格と売り上げ数の関係をまとめたものである。

１皿あたりの価格(円)	200	250	300
売り上げ数(皿)	200	150	100

(1) まず，二人は，上の表から，１皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考えて，売り上げ数が１皿あたりの価格の１次関数で表されると仮定した。このとき，１皿あたりの価格を x 円とおくと，売り上げ数は

$$\boxed{\text{アイウ}} - x \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

と表される。

(2) 次に，二人は，利益の求め方について考えた。

花子：利益は，売り上げ金額から必要な経費を引けば求められるよ。
太郎：売り上げ金額は，１皿あたりの価格と売り上げ数の積で求まるね。
花子：必要な経費は，たこ焼き用器具の賃貸料と材料費の合計だね。材料費は，売り上げ数と１皿あたりの材料費の積になるね。

(次ページに続く。)

二人は，次の三つの条件のもとで，1皿あたりの価格 x を用いて利益を表すことにした。

（条件1）　1皿あたりの価格が x 円のときの売り上げ数として①を用いる。

（条件2）　材料は，①により得られる売り上げ数に必要な分量だけ仕入れる。

（条件3）　1皿あたりの材料費は160円である。たこ焼き用器具の賃貸料は6000円である。材料費とたこ焼き用器具の賃貸料以外の経費はない。

利益を y 円とおく。y を x の式で表すと

$y=-x^2+$ **エオカ** $x-$ **キ** $\times 10000$ ……………②

である。

(3)　太郎さんは利益を最大にしたいと考えた。②を用いて考えると，利益が最大になるのは1皿あたりの価格が **クケコ** 円のときであり，そのときの利益は **サシスセ** 円である。

(4)　花子さんは，利益を7500円以上となるようにしつつ，できるだけ安い価格で提供したいと考えた。②を用いて考えると，利益が7500円以上となる1皿あたりの価格のうち，最も安い価格は **ソタチ** 円となる。

3　総務省が実施している国勢調査では都道府県ごとの総人口が調べられており，その内訳として日本人人口と外国人人口が公表されている。また,外務省では旅券(パスポート）を取得した人数を都道府県ごとに公表している。加えて，文部科学省では都道府県ごとの小学校に在籍する児童数を公表している。

そこで，47 都道府県の，人口１万人あたりの外国人人口（以下，外国人数），人口１万人あたりの小学校児童数（以下，小学生数），また，日本人１万人あたりの旅券を取得した人数（以下，旅券取得者数）を，それぞれ計算した。

（次ページに続く。）

(1)　図１は，2010 年における 47 都道府県の，旅券取得者数(横軸)と小学生数(縦軸)の関係を黒丸で，また，旅券取得者数(横軸)と外国人数(縦軸)の関係を白丸で表した散布図である。

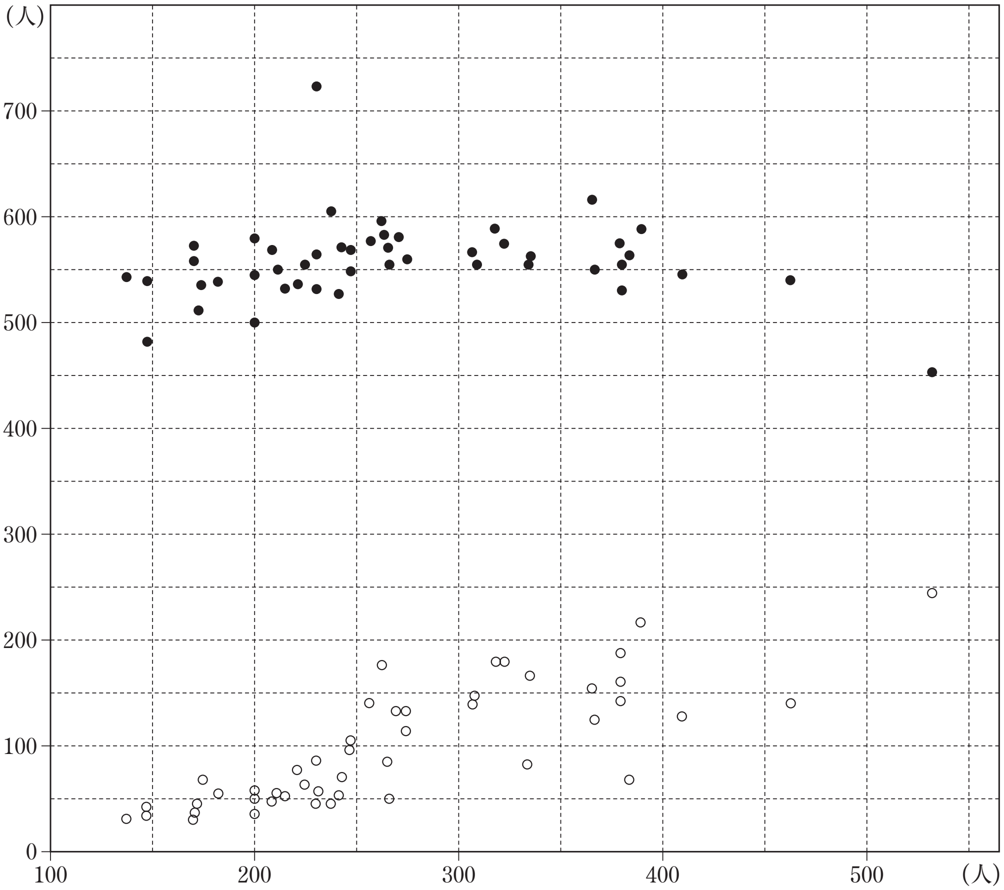


図１　2010 年における，旅券取得者数と小学生数の散布図（黒丸），旅券取得者数と外国人数の散布図（白丸）
（出典：外務省，文部科学省および総務省の Web ページにより作成）

（次ページに続く。）

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は図１の散布図に関する記述である。

(Ⅰ)　小学生数の四分位範囲は，外国人数の四分位範囲より大きい。

(Ⅱ)　旅券取得者数の範囲は，外国人数の範囲より大きい。

(Ⅲ)　旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より大きい。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは［ア］である。

［ア］の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	誤	正	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	誤	正	誤	正	誤

（次ページに続く。）

(2)　一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	f_3	f_4	$\cdots$	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+\cdots+x_kf_k)$$

で求めることができる。さらに階級の幅が一定で，その値が h のときは

$$x_2=x_1+h,\ x_3=x_1+2h,\ x_4=x_1+3h,\ \cdots,\ x_k=x_1+(k-1)h$$

に注意すると

$$\overline{x}=\boxed{\text{イ}}$$

と変形できる。

［イ］については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{x_1}{n}(f_1+f_2+f_3+f_4+\cdots+f_k)$

① $\dfrac{h}{n}(f_1+2f_2+3f_3+4f_4+\cdots+kf_k)$

② $x_1+\dfrac{h}{n}(f_2+f_3+f_4+\cdots+f_k)$

③ $x_1+\dfrac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots+(k-1)f_k\}$

④ $\dfrac{1}{2}(f_1+f_k)x_1-\dfrac{1}{2}(f_1+kf_k)$

（次ページに続く。）

図 2 は，2008 年における 47 都道府県の旅券取得者数のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

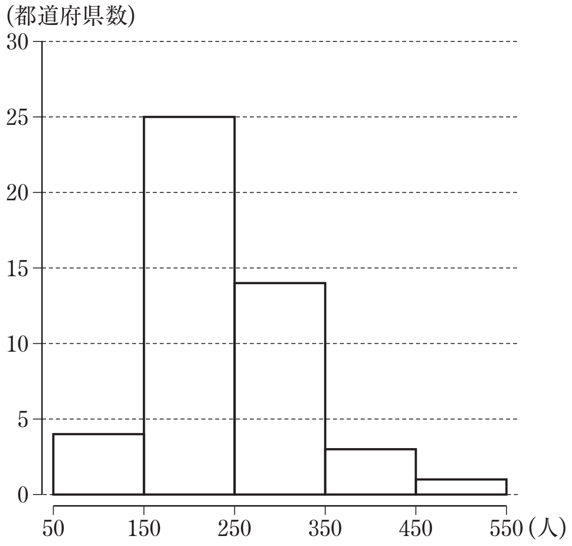


図 2　2008 年における旅券取得者数のヒストグラム
（出典：外務省の Web ページにより作成）

図 2 のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定する。このとき，平均値 $\overline{x}$ は小数第 1 位を四捨五入すると **［ウエオ］** である。

（次ページに続く。）

(3)　一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	…	x_k	計
度数	f_1	f_2	…	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，分散 s^2 は

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\}$$

で求めることができる。さらに s^2 は

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}\times\boxed{\text{カ}}+(\overline{x})^2\times\boxed{\text{キ}}\right\}$$

と変形できるので

$$s^2=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-\boxed{\text{ク}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である。

[カ]～[ク] の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　n	①　n^2	②　$\overline{x}$	③　$n\overline{x}$	④　$2n\overline{x}$
⑤　$n^2\overline{x}$	⑥　$(\overline{x})^2$	⑦　$n(\overline{x})^2$	⑧　$2n(\overline{x})^2$	⑨　$3n(\overline{x})^2$

（次ページに続く。）

図3は，図2を再掲したヒストグラムである。

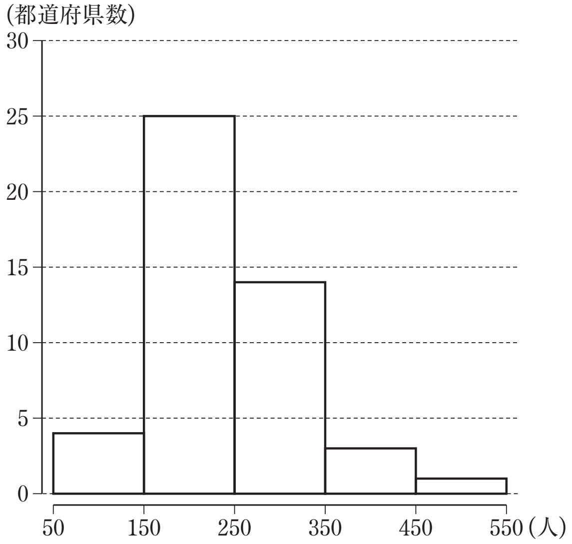


図3　2008年における旅券取得者数のヒストグラム
(出典：外務省のWebページにより作成)

図3のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は(2)で求めた [ウエオ] である。[ウエオ] の値と式①を用いると，分散 s^2 は [ケ] である。

[ケ] については，最も近いものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪　3900	①　4900	②　5900	③　6900
④　7900	⑤　8900	⑥　9900	⑦　10900

第3講　場合の数と確率

1　花子さんと太郎さんは，得点に応じた景品を一つもらえる，さいころを使った次のゲームを行う。ただし，得点なしの場合は景品をもらえない。

ゲームのルール

- 最初にさいころを 1 回投げる。
- さいころを 1 回投げた後に，続けて 2 回目を投げるかそれとも 1 回で終えて 2 回目を投げないかを，自分で決めることができる。
- 2 回目を投げた場合は，出た目の合計を 6 で割った余りを A とする。2 回目を投げなかった場合は，1 回目に出た目を 6 で割った余りを A とする。
- A が決まった後に，さいころをもう 1 回投げ，出た目が A 未満の場合は A を得点とし，出た目が A 以上のときは得点なしとする。

(1)　1 回目に投げたさいころの目にかかわらず 2 回目を投げる場合を考える。$A=4$ となるのは出た目の合計が [ア] または [イウ] の場合であるから，$A=4$ となる確率は $\dfrac{[エ]}{[オ]}$ である。また，$A \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{[カ]}{[キ]}$ である。

（次ページに続く。）

(2)　花子さんは 4 点以上の景品が欲しいと思い，$A \geqq 4$ となる確率が最大となるような戦略を考えた。

例えば，さいころを 1 回投げたところ，出た目は 5 であったとする。この条件のもとでは，2 回目を投げない場合は確実に $A \geqq 4$ となるが，2 回目を投げると $A \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。よって，この条件のもとでは 2 回目を投げない方が $A \geqq 4$ となる確率は大きくなる。

1 回目に出た目が 5 以外の場合も，このように 2 回目を投げない場合と投げる場合を比較すると，花子さんの戦略は次のようになる。

花子さんの戦略

1 回目に投げたさいころの目を 6 で割った余りが $\boxed{\text{コ}}$ のときのみ，2 回目を投げる。

1 回目に投げたさいころの目が 5 以外の場合も考えてみると，いずれの場合も 2 回目を投げたときに $A \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。このことから，花子さんの戦略のもとで $A \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，この確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ より大きくなる。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪　2 以下	①　3 以下	②　4 以下
③　2 以上	④　3 以上	⑤　4 以上

（次ページに続く。）

(3)　太郎さんは，どの景品でもよいからもらいたいと思い，得点なしとなる確率が最小となるような戦略を考えた。

例えば，さいころを1回投げたところ，出た目は3であったとする。この条件のもとでは，2回目を投げない場合，得点なしとなる確率は $\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ であり，2回目を投げる場合，得点なしとなる確率は $\frac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チツ}}$ である。よって，1回目に投げたさいころの目が3であったときは，［テ］。

1回目に投げたさいころの目が3以外の場合についても考えてみると，太郎さんの戦略は次のようになる。

太郎さんの戦略

1回目に投げたさいころの目を6で割った余りが［ト］のときのみ，2回目を投げる。

この戦略のもとで太郎さんが得点なしとなる確率は $\frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌネ}}$ であり，この確率は，1回目に投げたさいころの目にかかわらず2回目を投げる場合における得点なしとなる確率より小さくなる。

［テ］の解答群

⓪　2回目を投げない方が得点なしとなる確率は小さい
①　2回目を投げた方が得点なしとなる確率は小さい
②　2回目を投げても投げなくても得点なしとなる確率は変わらない

［ト］の解答群

⓪　2以下	①　3以下	②　4以下
③　2以上	④　3以上	⑤　4以上

2　二つの袋 A，B と一つの箱がある。A の袋には赤球 2 個と白球 1 個が入っており，B の袋には赤球 3 個と白球 1 個が入っている。また，箱には何も入っていない。

(1)　A，B の袋から球をそれぞれ 1 個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の 2 個の球のうち少なくとも 1 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を 1 個取り出すとき，取り出した球が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ であり，取り出した球が赤球であったときに，それが B の袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

（次ページに続く。）

(2)　A，B の袋から球をそれぞれ 2 個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 2 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 3 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。また，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，それらのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

第４講　整数の性質

1

(1)　不定方程式

$$7x-31y=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす自然数 x，y の組の中で，x が最小のものは

$x=$ **ア** ，　$y=$ **イ**

であり，不定方程式①のすべての整数解は，k を整数として

$x=$ **ウエ** $k+$ ア ，　$y=$ **オ** $k+$ イ

と表せる。

（次ページに続く。）

(2)　自然数 n に対し，n^2 を [オ] で割った余りが [イ] となるのは，n を [オ] で割った余りが，**[カ]** または **[キ]** のときである。ただし，[カ]，[キ] の解答の順序は問わない。

(3)　不定方程式①の整数解 y のうち，ある自然数 n を用いて $y=n^2$ と表せるものを小さい方から四つ並べると

[ク]，**[ケコ]**，**[サシス]**，**[セソタ]**

である。

(4)　$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数であるような自然数 x のうち，$x \geqq 1000$ を満たす最小のものは **[チツテト]** である。x が [チツテト] のとき，$\sqrt{31(7x-1)}$ の値は **[ナニヌ]** である。

2

(1)　整数 k が $0 \leqq k < 5$ を満たすとする。$77k = 5 \times 15k + 2k$ に注意すると，$77k$ を 5 で割った余りが 1 となるのは $k =$ [ア] のときである。

(2)　三つの整数 k，ℓ，m が

$$0 \leqq k < 5,\ 0 \leqq \ell < 7,\ 0 \leqq m < 11$$

を満たすとする。このとき

$$\frac{k}{5} + \frac{\ell}{7} + \frac{m}{11} - \frac{1}{385} \quad \cdots\cdots ①$$

が整数となる k，ℓ，m を求めよう。

①の値が整数のとき，その値を n とすると

$$\frac{k}{5} + \frac{\ell}{7} + \frac{m}{11} = \frac{1}{385} + n \quad \cdots\cdots ②$$

となる。②の両辺に 385 を掛けると

$$77k + 55\ell + 35m = 1 + 385n \quad \cdots\cdots ③$$

となる。これより

$$77k = 5(-11\ell - 7m + 77n) + 1$$

となることから，$77k$ を 5 で割った余りは 1 なので $k =$ [ア] である。

（次ページに続く。）

同様にして

$$55\ell = 7(-11k - 5m + 55n) + 1$$

および

$$35m = 11(-7k - 5\ell + 35n) + 1$$

であることに注意すると，$\ell =$ **イ** および $m =$ **ウ** が得られる。

なお，$k =$ ア ，$\ell =$ イ ，$m =$ ウ を③に代入すると $n = 2$ であることがわかる。

（次ページに続く。）

(3)　三つの整数 x, y, z が

$$0 \leqq x < 5,\ 0 \leqq y < 7,\ 0 \leqq z < 11$$

を満たすとする。次の形の整数

$$77 \times \boxed{\text{ア}} \times x + 55 \times \boxed{\text{イ}} \times y + 35 \times \boxed{\text{ウ}} \times z$$

を 5，7，11 で割った余りがそれぞれ 2，4，5 であるとする。このとき，x, y, z を求めよう。$77 \times \boxed{\text{ア}} \times x$ を 5 で割った余りが 2 であることから $x = \boxed{\text{エ}}$ となる。同様にして $y = \boxed{\text{オ}}$，$z = \boxed{\text{カ}}$ となる。

x, y, z を上で求めた値として，整数 p を

$$p = 77 \times \boxed{\text{ア}} \times x + 55 \times \boxed{\text{イ}} \times y + 35 \times \boxed{\text{ウ}} \times z$$

で定める。このとき，5，7，11 で割った余りがそれぞれ 2，4，5 である整数 M は，ある整数 r を用いて $M = p + 385r$ と表すことができる。

(4)　整数 p を(3)で定めたものとする。p^a を 5 で割った余りが 1 となる正の整数 a のうち，最小のものは $a = 4$ である。また，p^b を 7 で割った余りが 1 となる正の整数 b のうち，最小のものは $b = \boxed{\text{キ}}$ となる。さらに，p^c を 11 で割った余りが 1 となる正の整数 c のうち，最小のものは $c = \boxed{\text{ク}}$ である。

p^8 を 385 で割った余りを q とするとき，q を求めよう。p^8 を 5，7，11 で割った余りを利用して(3)と同様に考えると，$q = \boxed{\text{ケコサ}}$ であることがわかる。

第５講　図形の性質

1

(1)　円と直線に関する次の**定理**を考える。

> **定理**　3 点 P，Q，R は一直線上にこの順に並んでいるとし，点 T はこの直線上にないものとする。このとき，$PQ \cdot PR = PT^2$ が成り立つならば，直線 PT は 3 点 Q，R，T を通る円に接する。

この**定理**が成り立つことは，次のように説明できる。

直線 PT は 3 点 Q，R，T を通る円 O に接しないとする。このとき，直線 PT は円 O と異なる 2 点で交わる。直線 PT と円 O との交点で点 T とは異なる点を T′ とすると

$$PT \cdot PT' = \boxed{ア} \cdot \boxed{イ}$$

が成り立つ。点 T と点 T′ が異なることにより，$PT \cdot PT'$ の値と PT^2 の値は異なる。したがって，$PQ \cdot PR = PT^2$ に矛盾するので，背理法により，直線 PT は 3 点 Q，R，T を通る円に接するといえる。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ の解答群（解答の順序は問わない。）

⓪　PQ　　①　PR　　②　QR　　③　QT　　④　RT

（次ページに続く。）

(2)　△ABC において，$AB=\frac{1}{2}$，$BC=\frac{3}{4}$，AC＝1 とする。

このとき，∠ABC の二等分線と辺 AC との交点を D とすると，$AD=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。直線 BC 上に，点 C とは異なり，BC＝BE となる点 E をとる。∠ABE の二等分線と線分 AE との交点を F とし，直線 AC との交点を G とすると

$$\frac{AC}{AG}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}},\quad \frac{\triangle ABF\text{の面積}}{\triangle AFG\text{の面積}}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

である。

線分 DG の中点を H とすると，$BH=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。また

$$AH=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}},\quad CH=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

である。

△ABC の外心を O とする。△ABC の外接円 O の半径が

$\frac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タチ}}}{\boxed{ツテ}}$ であることから，線分 BH を 1：2 に内分する点を I とすると

$$IO=\frac{\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニヌ}}$$

であることがわかる。

2　点 Z を端点とする半直線 ZX と半直線 ZY があり，$0° < \angle XZY < 90°$ とする。また，$0° < \angle SZX < \angle XZY$ かつ $0° < \angle SZY < \angle XZY$ を満たす点 S をとる。点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円を作図したい。

円 O を，次の (Step 1)～(Step 5) の**手順**で作図する。

手順

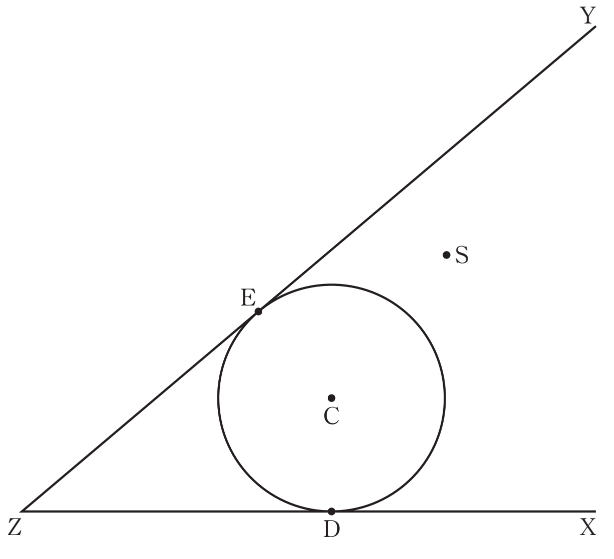
(Step 1)　$\angle XZY$ の二等分線 ℓ 上に点 C をとり，下図のように半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円 C を作図する。また，円 C と半直線 ZX との接点を D，半直線 ZY との接点を E とする。

(Step 2)　円 C と直線 ZS との交点の一つを G とする。

(Step 3)　半直線 ZX 上に点 H を $DG \parallel HS$ を満たすようにとる。

(Step 4)　点 H を通り，半直線 ZX に垂直な直線を引き，ℓ との交点を O とする。

(Step 5)　点 O を中心とする半径 OH の円 O をかく。



参考図

（次ページに続く。）

(1)　(Step 1)～(Step 5) の**手順**で作図した円 O が求める円であることは，次の**構想**に基づいて下のように説明できる。

構想

円 O が点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円であることを示すには，OH＝[ア]が成り立つことを示せばよい。

作図の**手順**より，△ZDG と △ZHS との関係，および △ZDC と △ZHO との関係に着目すると

DG：[イ]＝[ウ]：[エ]

DC：[オ]＝[ウ]：[エ]

であるから，DG：[イ]＝DC：[オ]となる。

ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，∠CDG＝∠[カ]であるので，△CDG と△[カ]との関係に着目すると，CD＝CG より OH＝[ア]であることがわかる。

なお，3 点 S，O，H が一直線上にある場合は，DG＝[キ]DC となり，DG：[イ]＝DC：[オ]より OH＝[ア]であることがわかる。

[ア]～[オ]の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ DH	① HO	② HS	③ OD	④ OG
⑤ OS	⑥ ZD	⑦ ZH	⑧ ZO	⑨ ZS

[カ]の解答群

⓪ OHD	① OHG	② OHS	③ ZDS
④ ZHG	⑤ ZHS	⑥ ZOS	⑦ ZCG

（次ページに続く。）

(2) 点Sを通り，半直線ZXと半直線ZYの両方に接する円は二つ作図できる。特に，点Sが∠XZYの二等分線ℓ上にある場合を考える。半径が大きい方の円の中心をO_1とし，半径が小さい方の円の中心をO_2とする。また，円O_2と半直線ZYが接する点をIとする。円O_1と半直線ZYが接する点をJとし，円O_1と半直線ZXが接する点をKとする。

作図をした結果，円O_1の半径は5，円O_2の半径は3であったとする。このとき，IJ＝[ク]$\sqrt{[ケコ]}$である。さらに，円O_1と円O_2の接点Sにおける共通接線と半直線ZYとの交点をLとし，直線LKと円O_1との交点で点Kとは異なる点をMとすると

LM・LK＝[サシ]

である。

また，ZI＝[ス]$\sqrt{[セソ]}$であるので，直線LKと直線ℓとの交点をNとすると

$\dfrac{\mathrm{LN}}{\mathrm{NK}} = \dfrac{[タ]}{[チ]}$，　SN＝$\dfrac{[ツ]}{[テ]}$

である。

テキスト解答

【講義問題の略解】

※動画講義の内容を補完するものです。記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません。ご了承ください。

第１講　式と計算・図形と計量

1 [1] $(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=19^2-(5\sqrt{13})^2=361-325=36$

$(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})>0$, $19+5\sqrt{13}>0$ より, $19-5\sqrt{13}>0$

$\alpha=+\sqrt{19+5\sqrt{13}}$, $\beta=+\sqrt{19-5\sqrt{13}}$ とすると

$\alpha^2+\beta^2=(19+5\sqrt{13})+(19-5\sqrt{13})=38$

$\alpha\beta=\sqrt{19+5\sqrt{13}}\sqrt{19-5\sqrt{13}}$

$=\sqrt{(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})}=\sqrt{36}=6$

であり

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=38+2\cdot6=50$

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=38-2\cdot6=26$

である。$\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha>\beta$ より

$\alpha+\beta=+\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ ……①, $\alpha-\beta=+\sqrt{26}$ ……②

したがって

(①＋②)÷2 より $\alpha=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2}$　　(①－②)÷2 より $\beta=\dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{26}}{2}$

[2] $|ax-b-7|<3$ ……①より $-3<ax-b-7<3$

よって $b+4<ax<b+10$ ……①′

(1) $a=-3$, $b=-2$ のとき, ①′ より $2<-3x<8$　　$-\dfrac{8}{3}<x<-\dfrac{2}{3}$

よって, ①を満たす整数全体の集合 P は　　$P=\{-2, -1\}$

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, ①′ より $\sqrt{2}(b+4)<x<\sqrt{2}(b+10)$ ……①″

$\sqrt{2}b+4\sqrt{2}<x<\sqrt{2}b+10\sqrt{2}$

(i) $b=1$ のとき, ①″ より $5\sqrt{2}<x<11\sqrt{2} \iff \sqrt{50}<x<\sqrt{242}$

よって, ①を満たす整数 x は $x=8, 9, \cdots\cdots, 15$ の $15-8+1=8$ (個)

(ii) ①を満たす整数が $8+1=9$ 個であるような正の整数 b を考える。

$b=2$ のとき, ①″ より $6\sqrt{2}<x<12\sqrt{2} \iff \sqrt{72}<x<\sqrt{288}$

よって, ①を満たす整数 x は $x=9, 10, \cdots\cdots, 16$ の $16-9+1=8$ (個)

$b=3$ のとき, ①″ より $7\sqrt{2}<x<13\sqrt{2} \iff \sqrt{98}<x<\sqrt{338}$

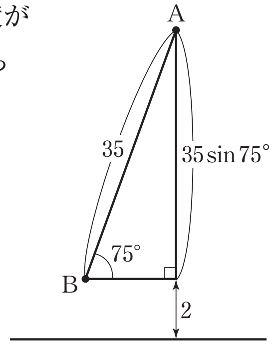
よって, ①を満たす整数 x は $x=10, 11, \cdots\cdots, 18$ の $18-10+1=9$ (個)

よって①を満たす整数が $8+1=9$ 個であるような正の整数 b のうち, 最小のものは 3

2

[1] ⑴　はしごの先端 A の高さが最も高くなるのは，はしごの角度が 75° のときである。よって，最高到達点の高さは，地面から

$$2+AB\sin 75^\circ$$
$$=2+35\sin 75^\circ$$
$$=2+35\times 0.9659 \quad \text{（三角比の表より）}$$
$$=2+33.8065$$
$$=35.8065\fallingdotseq 36\ (\text{m})$$



⑵ (i)　直角三角形 PBQ において

$$\tan\angle PBQ=\frac{PQ}{BQ}=\frac{4}{3}=1.333\cdots\cdots$$

三角比の表より，$\angle PBQ\fallingdotseq 53^\circ$

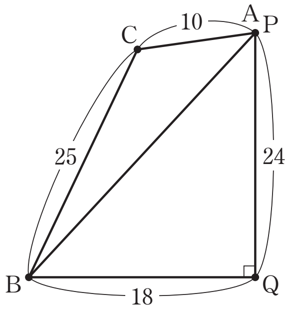
三平方の定理より　$BP=30$　　よって $AB=30$

次に三角形 ABC において，余弦定理より

$$\cos\angle ABC=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2\cdot BA\cdot BC}=\frac{30^2+25^2-10^2}{2\cdot 30\cdot 25}$$
$$=\frac{6^2+5^2-2^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{57}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{19}{20}=0.95$$

三角比の表より，$\angle ABC\fallingdotseq 18^\circ$

したがって，$\angle QBC=\angle PBQ+\angle ABC\fallingdotseq 53+18=71^\circ$　（⑤）



(ii)　フェンスを直線に見立て，BC，BQ との交点をそれぞれ R，S とすると

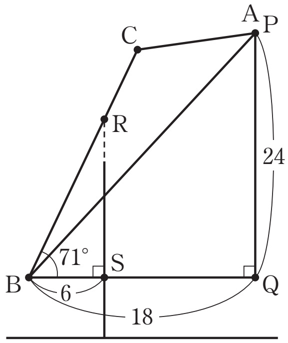
$$RS=BS\tan 71^\circ$$
$$=6\times 2.9042 \quad \text{（三角比の表より）}$$
$$=17.4252$$

よって，フェンスの高さが

$$2+17.4252=19.4252\ (\text{m})$$

以上のとき，はしごがフェンスに当たる。

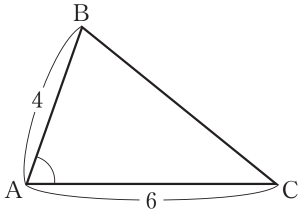
したがって，はしごがフェンスに当たらないフェンスの高さのうち，最大のものは　19 m　（④）



[2] ⑴　余弦定理により

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$$
$$=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{3}=16+36-16=36$$

よって，$BC=6$ となり，△ABC はただ一通りに決まる。



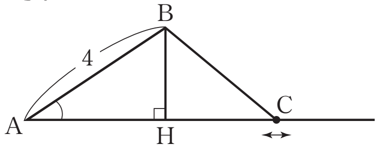
⑵　$\sin\angle BAC=\dfrac{1}{3}$ を満たす $\angle BAC$ は，鋭角と鈍角の２つ存在する。

(i)　∠BAC が鋭角のとき

点 B から直線 AC に垂線 BH を下ろすと，

BC が最小となるのは，点 C が点 H と一致するとき。

$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAC}=4\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$



よって，$\mathrm{BC}\geqq\dfrac{4}{3}$

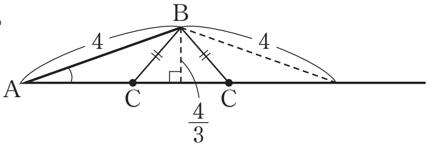
(ii)　∠BAC が鈍角のとき

$\mathrm{BC}\geqq 4$

(i)(ii)より　$\mathrm{BC}\geqq\dfrac{4}{3}$

$\mathrm{BC}=\dfrac{4}{3}$ のとき，△ABC はただ一通りに決まる。

$\dfrac{4}{3}<\mathrm{BC}<4$ のとき，△ABC は二通りに決まる。



BC＝4 のとき，△ABC はただ一通りに決まる。

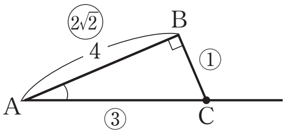
BC＞4 のとき，△ABC は二通りに決まる。

また，∠ABC＝90° のとき，∠BAC は鋭角であり，

$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{3}$ より，AC：BC＝3：1

よって，AC：BC：AB＝3：1：$2\sqrt{2}$ であるから，

$\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{AB}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 4=\sqrt{2}$

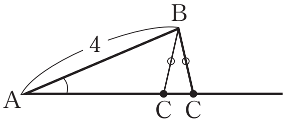


以上より，△ABC の形状について

・$\dfrac{4}{3}<\mathrm{BC}<\sqrt{2}$ のとき

△ABC は二通りに決まり，それらは

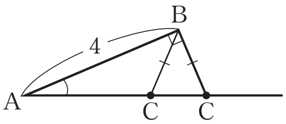
鋭角三角形と鈍角三角形である　(⑤)



・$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ のとき

△ABC は二通りに決まり，それらは

直角三角形と鈍角三角形である　(⑦)



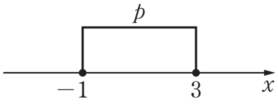
・$\mathrm{BC}>\sqrt{2}$ かつ $\mathrm{BC}\neq 4$ のとき

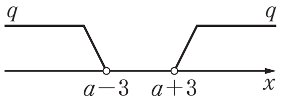
△ABC は二通りに決まり，それらはともに鈍角三角形である　(⑧)

3　$|x-a|>3$ より，

$x-a<-3,\ 3<x-a$

よって，$q：x<a-3,\ a+3<x$

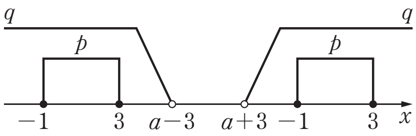




(1)　命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるような a の値の範囲は

$a+3<-1$　または　$3<a-3$

よって，$a<-4$，$6<a$



(2)　$a=6$ のとき

$q：x<3$，$9<x$

よって，$x=3$ は命題「$p \Longrightarrow q$」の反例

(3)　$p：-1\leqq x\leqq 3$ より，$\overline{p}：x<-1$，$3<x$

$a=1$ のとき

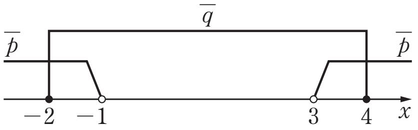
$q：x<-2$，$4<x$

よって　$\overline{q}：-2\leqq x\leqq 4$

よって，$\overline{p}$かつ$\overline{q}：-2\leqq x<-1$，$3<x\leqq 4$

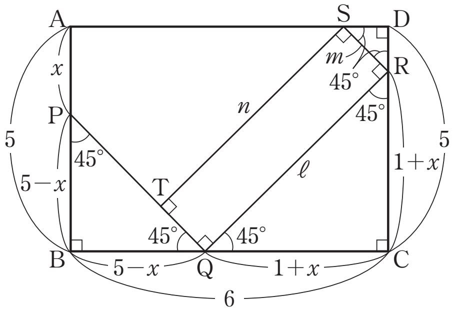
したがって，条件「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」は，

$r：3<x\leqq 4$ であるための必要条件であるが，十分条件ではない（⓪）



第２講　関数・データの分析

1 (1) AP$=x$ ($\geqq 0$) とおく。



$a=6$ のとき　BP$=5-x$，BQ$=5-x$，

CQ$=6-(5-x)=1+x$，CR$=1+x$

ℓ が頂点 C，D 以外の点で辺 CD と交わるのは

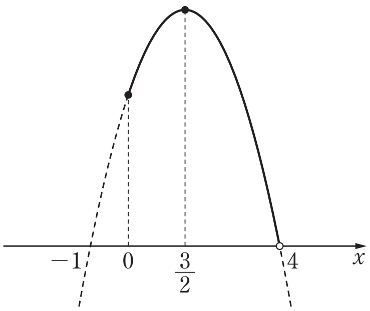
$0<\mathrm{CR}<5$

つまり $0<1+x<5$ より $0\leqq x<4$ のときである。

このとき，DR$=5-(1+x)=4-x$ であるから，

四角形 QRST の面積 S は

$$S=\mathrm{QR}\cdot\mathrm{SR}=\sqrt{2}\,\mathrm{CQ}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{DR}$$
$$=\sqrt{2}\,(1+x)\cdot\sqrt{2}\,(4-x)$$
$$=-2(x+1)(x-4)$$



したがって，S は $x=\dfrac{3}{2}$ のとき

最大値 $-2\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$

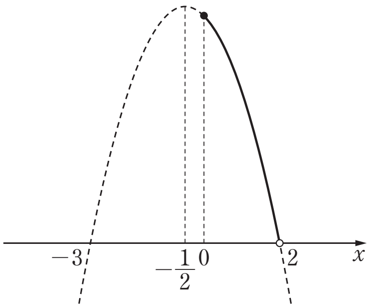
をとる。

$a=8$ のとき　CQ$=$CR$=3+x$

$0<\mathrm{CR}<5$ より $0<3+x<5$　　$0\leqq x<2$

DR$=2-x$ より

$$S=\sqrt{2}\,(3+x)\cdot\sqrt{2}\,(2-x)$$
$$=-2(x+3)(x-2)$$



したがって，S は $x=0$ のとき

最大値 $-2\cdot3\cdot(-2)=12$

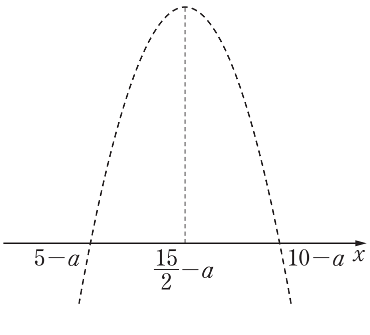
をとる。

(2) CQ$=$CR$=a-(5-x)=x+a-5$

$0<\mathrm{CR}<5$ より $0<x+a-5<5$　　$0\leqq x<10-a$

DR$=5-(x+a-5)=-x-a+10$　より

$$S=\sqrt{2}\,(x+a-5)\cdot\sqrt{2}\,(-x-a+10)$$
$$=-2(x+a-5)(x+a-10)$$
$$=-2\{x+1+(a-6)\}\{x-4+(a-6)\}$$



よってこのグラフは，$S=-2(x+1)(x-4)$ のグラフを x 軸方向に $-a+6$ だけ平行移動したものであるから，

グラフの頂点の y 座標は，(1)より $\dfrac{25}{2}$ である。

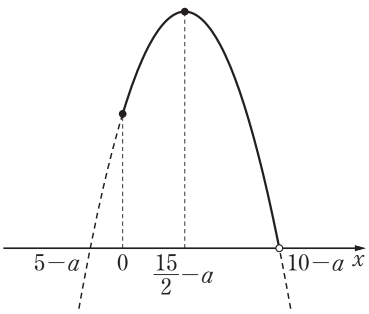
よって，$S=\frac{25}{2}$ となるのは，グラフの軸

$$x=\frac{(-a+5)+(-a+10)}{2}=\frac{15}{2}-a$$

が定義域 $0\leqq x<10-a$ に含まれる場合である。

したがって　$0\leqq\frac{15}{2}-a<10-a$

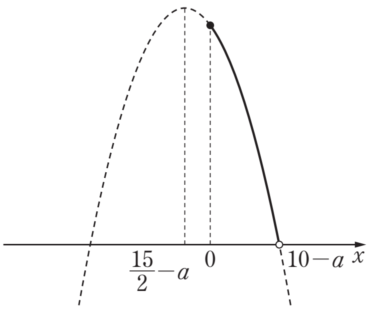
$5<a<10$ より　$5<a\leqq\frac{15}{2}$



$\frac{15}{2}<a<10$ を満たすとき，S は $x=0$ のとき

最大値 $-2(a-5)(a-10)=-2a^2+30a-100$

をとる。



2 (1)　1 皿あたりの価格を x 円，売り上げ数を s 皿とし，s は x の 1 次関数と仮定する。

x が 50 増えると s が 50 減るので，$s=\frac{-50}{50}x+b$ すなわち $s=-x+b$

と表される。

表より，$b=s+x=400$

したがって，売り上げ数 s は

$s=-x+400=400-x$

(2)　(利益)＝(売り上げ金額)－(必要な経費)

└(器具の賃貸料)＋(材料費)

(1 皿あたりの価格)×(売り上げ数)

(1 皿あたりの材料費)×(売り上げ数)

よって

$$y=x(400-x)-\{6000+160(400-x)\}$$
$$=-x^2+560x-70000$$
$$=-x^2+560x-7\times10000$$

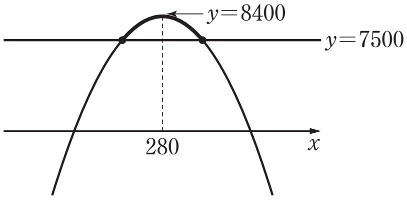
(3)　$y=-(x-280)^2+8400$ より，利益 y が最大になるのは 1 皿あたりの価格が $x=280$ (円) のときであり，そのときの利益は $y=8400$ (円) である。

(4)　利益が 7500 円以上より，$y\geqq7500$

$-(x-280)^2+8400\geqq7500$

$(x-280)^2\leqq900$

$-30\leqq x-280\leqq30$　　よって　$250\leqq x\leqq310$



したがって，利益が7500円以上となる1皿あたりの価格のうち，最も安い価格は
$x=250$ (円)

3 (1) (Ⅰ)について

四分位範囲は第3四分位数(人数の多い方から12番目の県の人数)から第1四分位数(人数の少ない方から12番目の県の人数)を引いたものである。

縦軸から黒丸および白丸の表す人数を読み取ると，小学生数の四分位範囲は外国人数の四分位範囲より小さい。よって，誤り。

(Ⅱ)について

横軸から読み取ると，旅券取得者数の範囲は概算で $530-130=400$ (人)

白丸の縦軸から読み取ると，外国人数の範囲は概算で $250-30=220$ (人)

よって，旅券取得者数の範囲は外国人数の範囲より大きい。よって，正しい。

(Ⅲ)について

白丸の分布の様子を見ると右上がりの傾向，つまり正の相関が見られる一方，黒丸の分布には傾向が見られない。よって，旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より小さい。よって，誤り。

以上より，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは　(⑤)

(2) $\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+\cdots\cdots+x_kf_k)$

$=\frac{1}{n}[x_1f_1+(x_1+h)f_2+(x_1+2h)f_3+(x_1+3h)f_4+\cdots\cdots+\{x_1+(k-1)h\}f_k]$

$=\frac{1}{n}[x_1(f_1+f_2+f_3+f_4+\cdots\cdots+f_k)+h\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}]$

$=\frac{1}{n}\cdot x_1\cdot n+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}$

$=x_1+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}$　(③)

図2のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，階級値およびその値を取る度数は次の表となる。

階級値	100	200	300	400	500	計
度数	4	25	14	3	1	47

$\overline{x}=x_1+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}$

$=100+\frac{100}{47}(25+2\cdot14+3\cdot3+4\cdot1)$

$=100+\frac{6600}{47}$

$=240.4\cdots\cdots$

小数第1位を四捨五入すると，求める平均値 $\overline{x}$ は240

(3)　$s^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\}$

$=\dfrac{1}{n}[\{x_1{}^2-2x_1\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_1+\{x_2{}^2-2x_2\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_2+\cdots\cdots$

$+\{x_k{}^2-2x_k\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_k]$

$=\dfrac{1}{n}\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}(x_1f_1+x_2f_2+\cdots\cdots+x_kf_k)$

$+(\overline{x})^2\times(f_1+f_2+\cdots\cdots+f_k)\}$

$=\dfrac{1}{n}\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}\times n\overline{x}+(\overline{x})^2\times n\}$

（③）　（⓪）

$=\dfrac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-(\overline{x})^2$　（⑥）

図３（図２）のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，(2)より $\overline{x}=240$ であり，分散 s^2 は

$s^2=\dfrac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-(\overline{x})^2$

$=\dfrac{1}{47}(100^2\cdot4+200^2\cdot25+300^2\cdot14+400^2\cdot3+500^2\cdot1)-240^2$

$=\dfrac{100^2}{47}(4+100+126+48+25)-240^2$

$=\dfrac{100^2}{47}\cdot303-240^2$

$=6868.0\cdots\cdots$

この値に最も近いものは，6900　（③）

第３講　場合の数と確率

[1] 2回目を投げた場合

出目の和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0

2回目を投げなかった場合

出目	1	2	3	4	5	6
A	1	2	3	4	5	0

(1)　2回目を投げた場合，$A=4$ となるのは，出た目の合計が4または10の場合である。

2回の出た目を(1回目に出た目，2回目に出た目)で表すと，

出た目の合計が4となるのは(1，3)，(2，2)，(3，1)の3通り

出た目の合計が10となるのは(4，6)，(5，5)，(6，4)の3通り

であるから，$A=4$ となる確率は $\dfrac{3+3}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

また，$A=5$ となるのは，出た目の合計が5または11の場合である。

出た目の合計が5となるのは(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)の4通り

出た目の合計が11となるのは(5，6)，(6，5)の2通り

であるから，$A=5$ となる確率は $\dfrac{4+2}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

したがって，$A\geqq 4$ となる確率は $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$

(2)　1回目に出た目が5のとき

・2回目を投げない場合は，$A\geqq 4$ となる確率は1である。

・2回目を投げると $A\geqq 4$ となるのは，出た目の合計が4，5，10，11の場合であり，

2回目に出た目が5，6の場合であるから，起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

よって，1回目に出た目が5の場合は，2回目を投げない方が $A\geqq 4$ となる確率が高い。

1回目に出た目が4の場合

・2回目を投げない場合は，$A\geqq 4$ となる確率は1である。

・2回目を投げると $A\geqq 4$ となるのは，出た目の合計が4，5，10，11の場合であり，

2回目に出た目が1，6の場合であるから，起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

よって，1回目に出た目が4の場合は，2回目を投げない方が $A\geqq 4$ となる確率が高い。

1回目に出た目が1，2，3，6の場合

・2回目を投げない場合は，$A\geqq 4$ となる確率は0である。

・2回目を投げると $A\geqq 4$ となるのは，出た目の合計が4，5，10，11の場合であり，

1回目に出た目	$\Longrightarrow$	2回目に出た目
1	$\Longrightarrow$	3，4
2	$\Longrightarrow$	2，3
3	$\Longrightarrow$	1，2
6	$\Longrightarrow$	4，5

の場合であるから，いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

よって，1回目に出た目が1，2，3，6の場合は，2回目を投げる方が $A \geqq 4$ となる確率が高い。

以上より，1回目に投げたさいころの目がいずれの場合も，2回目を投げたときに $A \geqq 4$ になる確率は $\dfrac{1}{3}$ であり

・1回目に出た目が1，2，3，6の場合，2回目を投げない場合に $A \geqq 4$ となる確率は0

・1回目に出た目が4，5の場合，2回目を投げない場合に $A \geqq 4$ となる確率は1

となるから，$A \geqq 4$ となる確率が最大となる花子さんの戦略は

> 1回目に投げたさいころの目を6で割った余りが3以下(①)のときのみ，2回目を投げる。

である。また，この戦略のもとで，$A \geqq 4$ となる確率は

$$\frac{4}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{5}{9}$$

であり，この確率は，1回目に投げたさいころの目にかかわらず2回目を投げたときに $A \geqq 4$ となる確率 $\dfrac{1}{3}$ より大きくなる。

(3)　A が決まった後に行う，さいころを1回投げる試行を T とする。

1回目に出た目が3のとき

・2回目を投げない場合，得点なしとなるのは，試行 T で出た目が3以上のときであり，起こる確率は $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ である。

・2 回目を投げる場合，得点なしとなるのは

2 回目に出た目		A		T で出た目		確率
1	$\Longrightarrow$	4	$\Longrightarrow$	4〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{3}{6}$
2	$\Longrightarrow$	5	$\Longrightarrow$	5，6	$\Longrightarrow$	$\frac{2}{6}$
3	$\Longrightarrow$	0	$\Longrightarrow$	1〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{6}{6}$
4	$\Longrightarrow$	1	$\Longrightarrow$	1〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{6}{6}$
5	$\Longrightarrow$	2	$\Longrightarrow$	2〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{5}{6}$
6	$\Longrightarrow$	3	$\Longrightarrow$	3〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{4}{6}$

であるから，起こる確率は $\frac{1}{6}\times\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{6}{6}+\frac{6}{6}+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}\right)=\frac{13}{18}\ \left(>\frac{2}{3}\right)$ である。

よって，1 回目に投げたさいころの目が 3 であったときは，2 回目を投げない方が得点なしとなる確率は小さい　(⓪)

1 回目に出た目が 3 以外の場合も，2 回目を投げる場合，2 回目に出た目 1〜6 に A の値 0〜5 が 1：1 で対応し，確率 $\frac{13}{18}$ で得点なしとなる。

2 回目を投げない場合，得点なしとなるのは

1 回目に出た目		A		T で出た目		確率
1	$\Longrightarrow$	1	$\Longrightarrow$	1〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{6}{6}=\frac{18}{18}$
2	$\Longrightarrow$	2	$\Longrightarrow$	2〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$
3	$\Longrightarrow$	3	$\Longrightarrow$	3〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{4}{6}=\frac{12}{18}$
4	$\Longrightarrow$	4	$\Longrightarrow$	4〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{3}{6}=\frac{9}{18}$
5	$\Longrightarrow$	5	$\Longrightarrow$	5，6	$\Longrightarrow$	$\frac{2}{6}=\frac{6}{18}$
6	$\Longrightarrow$	0	$\Longrightarrow$	1〜6	$\Longrightarrow$	$\frac{6}{6}=\frac{18}{18}$

であるから，太郎さんの戦略は

> 1 回目に投げたさいころの目を 6 で割った余りが 2 以下(⓪)のときのみ，2 回目を投げる。

である。またこの戦略のもとで，得点なしとなる確率は

$$\frac{1}{6}\times\left(\frac{13}{18}+\frac{13}{18}+\frac{12}{18}+\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{13}{18}\right)=\frac{11}{18}$$

であり，この確率は，1 回目に投げたさいころの目にかかわらず 2 回目を投げる場合に得点なしとなる確率 $\dfrac{13}{18}$ より小さくなる。

2　袋 A：赤球 2 個，白球 1 個　　袋 B：赤球 3 個，白球 1 個

(1)　(i)「箱の中の 2 個の球のうち少なくとも 1 個が赤球である」事象は，「箱の中の 2 個の球がともに白球である」事象の余事象である。よって，求める確率は

$$1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$$

(ii)　箱の中から赤球が取り出されるのは，次の場合

①　袋 A から赤球，袋 B から赤球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は　$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times1=\dfrac{1}{2}$

②　袋 A から赤球，袋 B から白球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は　$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$

③　袋 A から白球，袋 B から赤球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

①～③は互いに排反であるから，箱の中から赤球が取り出される確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{17}{24}$$

取り出された球が赤球であり，かつそれが B の袋に入っていたものであるのは，①において箱から取り出された赤玉が B の袋に入っていたものである場合と，③の場合であり，その確率は $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$ である。

したがって，取り出された球が赤球であったときに，それが B の袋に入っていたものである条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{17}{24}}=\frac{9}{17}$$

(2)　A の袋から球を 2 個取り出したとき

2 個とも赤球である確率は $\dfrac{1}{{}_3C_2}=\dfrac{1}{3}$　　赤球と白球 1 個ずつである確率は $\dfrac{2}{3}$

B の袋から球を 2 個取り出したとき

2 個とも赤球である確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{2}$　　赤球と白球 1 個ずつである確率は $\dfrac{1}{2}$

(i)　箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 2 個が赤球であるのは

A，B の袋からそれぞれ赤球と白球を 1 個ずつ取り出す場合　……①

のみである。よって，その確率は $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 3 個が赤球であるのは

・A の袋から赤球を 2 個，B の袋から赤球と白球を 1 個ずつ取り出す場合　……②

・A の袋から赤球と白球を 1 個ずつ，B の袋から赤球を 2 個取り出す場合　……③

のいずれかである。よって，その確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

また，箱の中の 4 個の球が，4 個とも赤球であるのは

A，B の袋からそれぞれ赤球を 2 個取り出す場合　……④

のみであり，その確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)　箱の中から球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は，箱の中の 4 個の球のうち

ちょうど 2 個が赤球であるとき　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

ちょうど 3 個が赤球であるとき　$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

4 個とも赤球であるとき　$\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}$

したがって，箱の中から球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\frac{1}{18}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{17}{36}$

また，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であり，かつそのうちの 1 個のみが B の袋(もう 1 個は A の袋)に入っていたものである確率は

①のとき　$\frac{1}{3}\times\frac{1\times 1}{{}_4C_2}=\frac{1}{18}$　　②のとき　$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times 1}{{}_4C_2}=\frac{1}{18}$

③のとき　$\frac{1}{3}\times\frac{1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{9}$　　④のとき　$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{9}$

よって，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であり，かつそのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである確率は

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

したがって，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，そのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{17}{36}}=\frac{12}{17}$$

第４講　整数の性質

1 (1)　$7x-31y=1$　……①　$\Longleftrightarrow$　$7x=31y+1$ は，y が最小のとき x も最小となる。

$y=1$ のとき　$7x=32$　　これを満たす自然数 x はない

$y=2$ のとき　$7x=63$　　$x=9$

したがって，①を満たす自然数 x，y の組の中で，x が最小のものは

$x=9$，$y=2$

よって，不定方程式①の解の１つが $x=9$，$y=2$ であるから

$7\cdot9-31\cdot2=1$　……②

が成立する。①－②より

$7(x-9)-31(y-2)=0$　　つまり　$7(x-9)=31(y-2)$

７と31は互いに素であるから，$x-9$は31の倍数である。よって，整数 k を用いて

$x-9=31k$

と表される。したがって，不定方程式①のすべての整数解は，整数 k を用いて

$x=31k+9$，$y=7k+2$

と表される。

(2)　自然数 n を７で割った余りを r ($r=0$，1，2，……，6) とすると，n は整数 m を用いて

$n=7m+r$

と表される。このとき

$n^2=(7m+r)^2$

$=49m^2+14mr+r^2$

$=7(7m^2+2mr)+r^2$

よって，n^2 を７で割った余りは，r^2 を７で割った余りと一致する。

$r^2=0$，1，4，9，16，25，36

であることから，n^2 を７で割った余りが２になるのは，r^2 を７で割った余りが２になるとき，すなわち　$r=3$，4 のときである。

したがって，自然数 n に対し，n^2 を７で割った余りが２となるのは，n を７で割った余りが３または４のときである。

(参考)

$n=7k\pm1$ のとき　$n^2=(7k\pm1)^2=49k^2\pm14k+1=7(7k^2\pm2k)+1$

$n=7k\pm2$ のとき　$n^2=(7k\pm2)^2=49k^2\pm28k+4=7(7k^2\pm4k)+4$

$n=7k\pm3$ のとき　$n^2=(7k\pm3)^2=49k^2\pm42k+9=7(7k^2\pm6k+1)+2$

(3)　不定方程式①の整数解 y は，(1)より整数 k を用いて $y=7k+2$ と表される。つまり，y を７で割ると余りが２である。

この整数 y が，自然数 n を用いて $y=n^2$ と表されるとき，(2)より n を７で割った余りが３または４である。そのような自然数 n を小さい方から四つ並べると

$n=3,\ 4,\ 10,\ 11$

である。このとき，n^2 すなわち y は小さい方から順に 9，16，100，121 である。

(4) $\sqrt{31(7x-1)}$ が整数となるのは，$7x-1$ が整数 y，n^2 を用いて

$7x-1=31y\quad(y=n^2)$

と表されるときである。

$7x-1=31y$ は，不定方程式①と一致し，その解は(1)より整数 k を用いて

$x=31k+9,\ y=7k+2$

と表される。また，$y=n^2$ と表されるとき，(2)より n を 7 で割った余りが 3 または 4 である。

$x\geqq1000$ より，$31k+9\geqq1000$　　$k\geqq\dfrac{991}{31}=31.9\cdots\cdots$　　よって，$k\geqq32$

このとき，$y=7k+2\geqq7\cdot32+2=226$

また，$y=n^2$ を満たす自然数 n は，小さい方より $n=3,\ 4,\ 10,\ 11,\ 17,\ \cdots\cdots$ であり，n^2 すなわち y は小さい方から順に 9，16，100，121，289，…… である。

よって，$y\geqq226$ かつ $y=n^2$ を満たす最小の自然数 y は $y=289$

このとき $7k+2=289$ より $k=41$ であり，$x=31k+9=31\cdot41+9=1280$

したがって，$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数となるような自然数 x のうち，$x\geqq1000$ を満たす最小のものは $x=1280$ である。

このとき，$\sqrt{31(7x-1)}=\sqrt{31\cdot31y}=\sqrt{31^2\cdot n^2}=\sqrt{31^2\cdot17^2}=31\cdot17=527$

2 (1) $77k=5\times15k+2k$ より，$77k$ を 5 で割った余りは，$2k$ を 5 で割った余りと一致する。

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき，$2k$ はそれぞれ 0，2，4，6，8 であり，$2k$ を 5 で割った余りはそれぞれ 0，2，4，1，3 であるから，$77k$ を 5 で割った余りが 1 となるのは $k=3$ のときである。

(2) $55\ell=7\times7\ell+6\ell$ であるから，55ℓ を 7 で割った余りは，6ℓ を 7 で割った余りと一致する。

$\ell=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のとき，6ℓ はそれぞれ 0，6，12，18，24，30，36 であり，6ℓ を 7 で割った余りはそれぞれ 0，6，5，4，3，2，1 であるから，55ℓ を 7 で割った余りが 1 となるのは $\ell=6$ のときである。

$35m=11\times3m+2m$ であるから，$35m$ を 11 で割った余りは，$2m$ を 11 で割った余りと一致する。$m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$ のとき，$2m$ はそれぞれ 0，2，4，6，8，10，12，14，16，18，20 であり，$2m$ を 11 で割った余りはそれぞれ 0，2，4，6，8，10，1，3，5，7，9 であるから，$35m$ を 11 で割った余りが 1 となるのは $m=6$ のときである。

(3) $77\times3\times x+55\times6\times y+35\times6\times z$ について，$55\times6\times y$，$35\times6\times z$ は 5 で割り切れる。

77×3 は，(1)より 5 で割った余りが 1 である。

よって，$77\times3\times x$ を5で割った余りは，$1\times x$ を5で割った余りに等しい。
その余りが2であることから，$0\leqq x<5$ を満たす整数 x は $x=2$
$77\times3\times x+55\times6\times y+35\times6\times z$ について，$77\times3\times x$，$35\times6\times z$ は7で割り切れる。
55×6 は，(2)より7で割った余りが1である。
よって，$55\times6\times y$ を7で割った余りは，$1\times y$ を7で割った余りに等しい。
その余りが4であることから，$0\leqq y<7$ を満たす整数 y は $y=4$
$77\times3\times x+55\times6\times y+35\times6\times z$ について，$77\times3\times x$，$55\times6\times y$ は11で割り切れる。
35×6 は，(2)より11で割った余りが1である。
よって，$35\times6\times z$ を11で割った余りは，$1\times z$ を11で割った余りに等しい。
その余りが5であることから，$0\leqq z<11$ を満たす整数 z は $z=5$
よって，$p=77\times3\times2+55\times6\times4+35\times6\times5$ と定めると，5，7，11で割った余りがそれぞれ2，4，5である整数 M は，整数 r を用いて

$$M=p+385r(=p+5\cdot7\cdot11r)$$

と表すことができる。

(4)　p を5で割った余りが2であることから，p^a を5で割った余りは，2^a を5で割った余りに等しい。$a=1$ から順に 2^a および 2^a を5で割った余りを求めると，初めて余りが1になるのは $a=4$ のときである。
p を7で割った余りが4であることから，p^b を7で割った余りは，4^b を7で割った余りに等しい。$b=1$ から順に 4^b および 4^b を7で割った余りを求めると，初めて余りが1になるのは $b=3$ のときである。
p を11で割った余りが5であることから，p^c を11で割った余りは，5^c を11で割った余りに等しい。$c=1$ から順に 5^c および 5^c を11で割った余りを求めると，初めて余りが1になるのは $c=5$ のときである。

p を5で割った余りが2であることから，p^8 を5で割った余りは，2^8 を5で割った余りに等しい。2^4 を5で割った余りは1であることから，$2^8=2^4\cdot2^4$ を5で割った余りは，$1\cdot1=1$ を5で割った余りに等しく，1である。
p を7で割った余りが4であることから，p^8 を7で割った余りは，4^8 を7で割った余りに等しい。4^3 を7で割った余りは1であることから，$4^8=4^3\cdot4^3\cdot4^2$ を7で割った余りは，$1\cdot1\cdot4^2=16$ を7で割った余りに等しく，2である。
p を11で割った余りが5であることから，p^8 を11で割った余りは，5^8 を11で割った余りに等しい。5^5 を11で割った余りは1であることから，$5^8=5^5\cdot5^3$ を11で割った余りは，$1\cdot5^3=125$ を11で割った余りに等しく，4である。
よって，(3)と同様に考えると，5，7，11で割った余りがそれぞれ1，2，4である整数は

$$77\times3\times1+55\times6\times2+35\times6\times4=1731$$

であり，p^8 はある整数 r を用いて

$$p^8=1731+385r$$

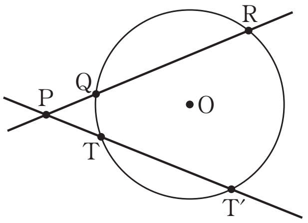
と表される。$1731=385\cdot4+191$ であることから，p^8 を 385 で割った余りは 191 である。

第５講　図形の性質

1 (1)　方べきの定理により

$PT \cdot PT' = PQ \cdot PR$

(⓪)　(①)

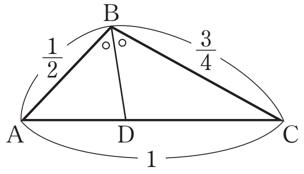


点 T と点 T′ が異なることより $PT \cdot PT' \neq PT^2$

よって，定理の仮定 $PQ \cdot PR = PT^2$ に矛盾する。

(2)　角の二等分線の性質より

$AD : CD = BA : BC = 2 : 3$



よって　$AD = \frac{2}{5}AC = \frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$

外角の二等分線の性質より

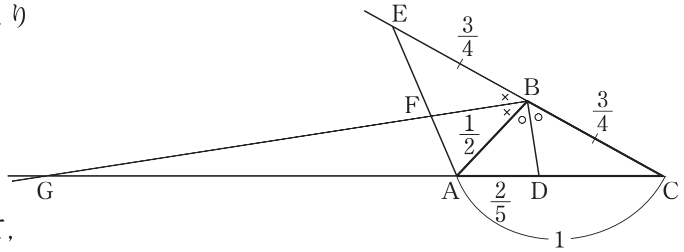
$AG : GC = BA : BC = 2 : 3$

よって　$AG : AC = 2 : 1$ より

$\frac{AC}{AG} = \frac{1}{2}$

$AC = 1$ より

$AG = 2$



△CGB と直線 AE について，

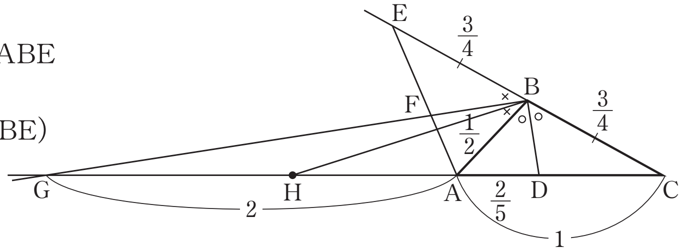
メネラウスの定理により

$$\frac{CE}{EB} \cdot \frac{BF}{FG} \cdot \frac{GA}{AC} = 1$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{BF}{FG} \cdot \frac{2}{1} = 1 \qquad \frac{BF}{FG} = \frac{1}{4}$$

よって　$\dfrac{\triangle ABF\text{ の面積}}{\triangle AFG\text{ の面積}} = \dfrac{BF}{FG} = \dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \angle DBG &= \angle DBA + \angle ABG \\ &= \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ABE \\ &= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ABE) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$



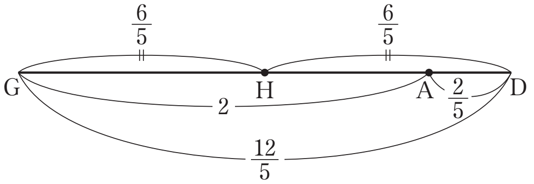
よって，点 H は △BDG の外接円の中心であり，

DG はこの円の直径，BH は半径である。

したがって

$$BH = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5}$$

また，$\mathrm{GH}=\mathrm{DH}=\dfrac{6}{5}$ より



$$\mathrm{AH}=\mathrm{AG}-\mathrm{GH}=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}+\mathrm{AH}=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$$

△ABC で余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2-1^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=-\frac{1}{4}$$

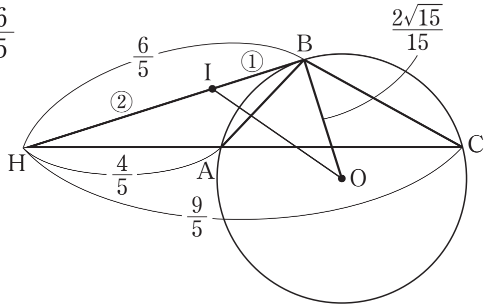
$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって，△ABC の外接円 O の半径 R は，正弦定理により

$$2R=\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$R=\frac{2}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{15}$$

$\mathrm{HA}\cdot\mathrm{HC}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{36}{25}$，　$\mathrm{HB}^2=\left(\dfrac{6}{5}\right)^2=\dfrac{36}{25}$



よって，(1)より直線 HB は円 O に接する。

したがって，$\angle\mathrm{HBO}=90°$

$\mathrm{BI}=\dfrac{1}{3}\mathrm{BH}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{5}=\dfrac{2}{5}$，

$\mathrm{BO}=R=\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$ より

△OBI で三平方の定理を用いて

$$\mathrm{IO}=\sqrt{\mathrm{BI}^2+\mathrm{BO}^2}=\frac{2}{15}\sqrt{3^2+(\sqrt{15})^2}=\frac{2}{15}\sqrt{24}=\frac{4\sqrt{6}}{15}$$

2 (1)　OH＝OS（⑤）を示せばよい。

作図の手順より

△ZDG∽△ZHSであるから

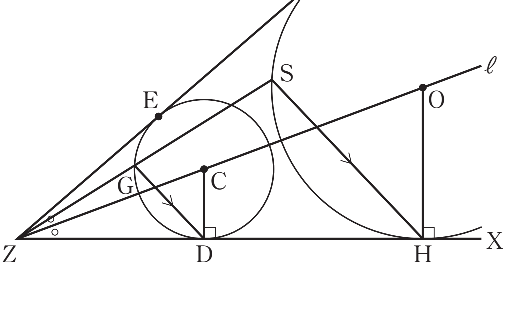
DG：HS＝ZD：ZH

（②）（⑥）（⑦）

△ZDC∽△ZHO であるから

DC：HO＝ZD：ZH

（①）

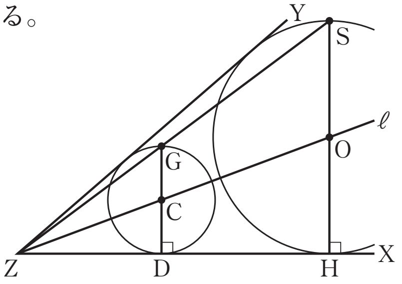


よって，DG：HS＝DC：HO

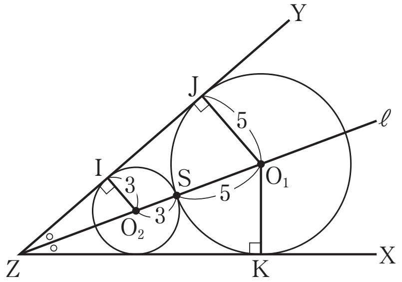
ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，∠CDG＝∠OHS（②）であるので，△CDG∽△OHS である。

よって，CD＝CG より OH＝OS であることがわかる。

なお，3 点 S，O，H が一直線上にある場合は，DG＝2DC となり，DG：HS＝DC：HO より OH＝OS であることがわかる。



(2)



三平方の定理より　$IJ=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$

方べきの定理より　$LM\cdot LK=LS^2$

ここで，LI＝LS＝LJ より

$$LS=\frac{1}{2}IJ=\sqrt{15}$$

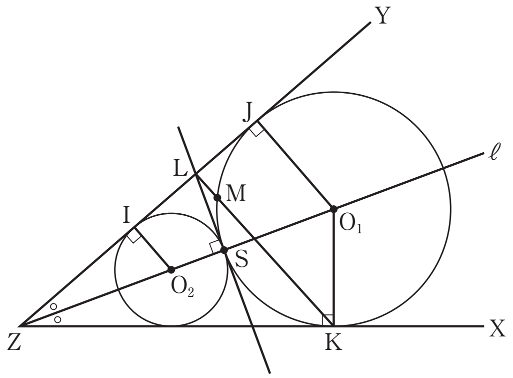
したがって，$LM\cdot LK=(\sqrt{15})^2=15$

また，$\triangle ZO_2I\backsim\triangle ZO_1J$ より，

$$ZI:ZJ=O_2I:O_1J$$

ZI＝x とおくと，$x:(x+2\sqrt{15})=3:5$

$x=3\sqrt{15}$　　　よって，$ZI=3\sqrt{15}$



角の二等分線の性質より

$$\frac{LN}{NK}=\frac{ZL}{ZK}=\frac{ZL}{ZJ}=\frac{ZI+IL}{ZI+IL+LJ}=\frac{3\sqrt{15}+\sqrt{15}}{3\sqrt{15}+\sqrt{15}+\sqrt{15}}=\frac{4\sqrt{15}}{5\sqrt{15}}=\frac{4}{5}$$

直角三角形 ZLS で

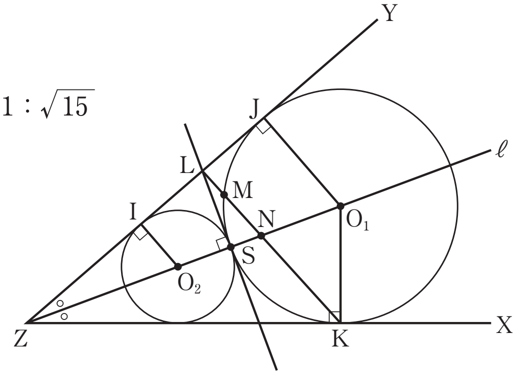
$ZL:LS=4\sqrt{15}:\sqrt{15}=4:1$ より

$ZL:LS:ZS=4:1:\sqrt{4^2-1^2}=4:1:\sqrt{15}$

よって，$ZS=\sqrt{15}LS=15$

また，点 K から直線 ℓ に垂線を下ろし，直線 ℓ との交点を P とすると△LSN∽△KPN であることから，

$$KP=\frac{5}{4}LS=\frac{5\sqrt{15}}{4}$$



直角三角形 ZKP で

$\mathrm{ZK}:\mathrm{KP}=5\sqrt{15}:\frac{5}{4}\sqrt{15}=4:1$ より

$\mathrm{ZK}:\mathrm{KP}:\mathrm{ZP}=4:1:\sqrt{15}$　　よって，$\mathrm{ZP}=\sqrt{15}\,\mathrm{KP}=\frac{75}{4}$

したがって，$\mathrm{SP}=\mathrm{ZP}-\mathrm{ZS}=\frac{75}{4}-15=\frac{15}{4}$

ゆえに，$\mathrm{SN}=\frac{4}{4+5}\mathrm{SP}=\frac{4}{9}\cdot\frac{15}{4}=\frac{5}{3}$

補　　　講

スタディサプリ 共通テスト直前対策講座 数学ⅠＡについて

この講座は，大学入学共通テストおよびセンター試験の「過去問題」を通じて，みなさんの実力をチェックし，底上げをするというコンセプトで作りました。この講座を見る頃は，おそらくほぼ全員の人が共通テストの過去問題を解いたことがあるでしょう。では，今一度，次のことを思い返してください。

・いつその過去問題を解きましたか？　まだ実力が伴っていない時期ではないですか？
・どのようなやり方で解きましたか？　今でも同じ解法を取りますか？
・解き直しをしましたか？　それぞれの大問は最後まで解き切りましたか？

１つでも「あ……」と思った人，この講座は，そんなあなたのためにあります。

あなたの「今の」実力が，大学入学共通テストがあなたに要求している資質・能力に対し，どこまで到達していて，どの部分が上回っているのか，または下回っているのか，あなたの予習と動画講義を通じてチェックすることで，あなたの実力が分野毎に整理されます。到達している，または上回っていれば，あとは演習あるのみ，そうでなければ，各分野を見直す最後のチャンスです。

直前期だからこそできる，「あなたの課題」の発見と克服。この講座に，得点アップのカギが隠されています。あなたならではのそのカギを発見してください。

山内　恵介

— 目次 —

第１講　式と計算・図形と計量
第２講　関数・データの分析
第３講　場合の数と確率
第４講　整数の性質
第５講　図形の性質

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから動画講義に臨んでください。講義は予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　式と計算・図形と計量

1

〔１〕 $(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=$ アイ であるから，$19-5\sqrt{13}$ は正の実数である。

$19+5\sqrt{13}$ の正の平方根を α とし，$19-5\sqrt{13}$ の正の平方根を β とする。このとき

$$\alpha^2+\beta^2=\boxed{\text{ウエ}},\quad \alpha\beta=\boxed{\text{オ}}$$

であり

$$(\alpha+\beta)^2=\boxed{\text{カキ}},\quad (\alpha-\beta)^2=\boxed{\text{クケ}}$$

である。したがって

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}+\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

$$\beta=\frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}-\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

（次ページに続く。）

〔２〕 a，b を定数とするとき，x についての不等式

$$|ax-b-7|<3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) $a=-3$，$b=-2$ とする。①を満たす整数全体の集合を P とする。この集合 P を，要素を書き並べて表すと

$$P=\{\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\}$$

となる。ただし，[アイ]，[ウエ] の解答の順序は問わない。

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。

(i) $b=1$ のとき，①を満たす整数は全部で [オ] 個である。

(ii) ①を満たす整数が全部で $\left(\boxed{\text{オ}}+1\right)$ 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは [カ] である。

（次ページに続く。）

2

平面上に2点A，Bがあり，AB＝8である。直線AB上にない点Pをとり，△ABPをつくり，その外接円の半径をRとする。

太郎さんは，図1のように，コンピュータソフトを使って点Pをいろいろな位置にとった。

図1は，点Pをいろいろな位置にとったときの△ABPの外接円をかいたものである。

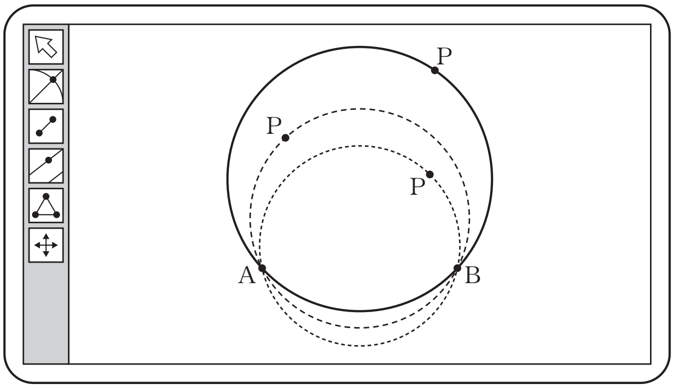


図　1

(1)　太郎さんは，点Pのとり方によって外接円の半径が異なることに気づき，次の**問題1**を考えることにした。

> **問題1**　点Pをいろいろな位置にとるとき，外接円の半径Rが最小となる△ABPはどのような三角形か。

正弦定理により，$2R=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sin\angle \text{APB}}$ である。よって，Rが最小となるのは

$\angle \text{APB}=\boxed{\text{イウ}}^\circ$ の三角形である。このとき，$R=\boxed{\text{エ}}$ である。

（次ページに続く。）

(2) 太郎さんは，図2のように，**問題1**の点Pのとり方に条件を付けて，次の**問題2**を考えた。

> **問題2**　直線ABに平行な直線をℓとし，直線ℓ上で点Pをいろいろな位置にとる。このとき，外接円の半径Rが最小となる△ABPはどのような三角形か。

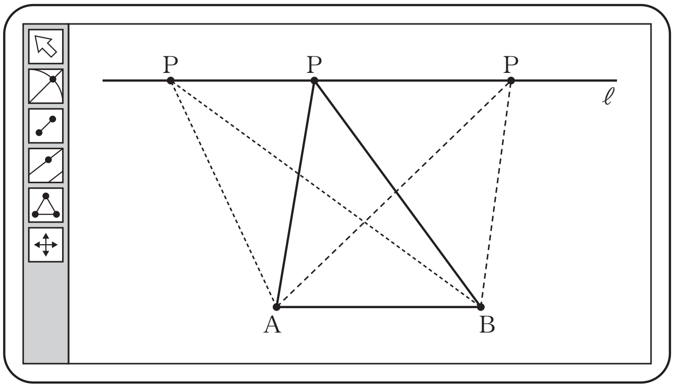


図　2

太郎さんは，この問題を解決するために，次の構想を立てた。

問題2の解決の構想

問題1の考察から，線分ABを直径とする円をCとし，円Cに着目する。直線ℓは，その位置によって，円Cと共有点をもつ場合ともたない場合があるので，それぞれの場合に分けて考える。

直線ABと直線ℓとの距離をhとする。直線ℓが円Cと共有点をもつ場合は，$h \leqq$ **オ** のときであり，共有点をもたない場合は$h >$ オ のときである。

（次ページに続く。）

(i)　$h \leqq$ [オ] のとき

直線 ℓ が円Cと共有点をもつので，R が最小となる△ABPは，$h <$ [オ] のとき **[カ]** であり，$h =$ [オ] のとき直角二等辺三角形である。

(ii)　$h >$ [オ] のとき

線分ABの垂直二等分線を m とし，直線 m と直線 ℓ との交点を P_1 とする。直線 ℓ 上にあり点 P_1 とは異なる点を P_2 とするとき $\sin\angle AP_1B$ と $\sin\angle AP_2B$ の大小を考える。

△ABP_2 の外接円と直線 m との共有点のうち，直線ABに関して点 P_2 と同じ側にある点を P_3 とすると，$\angle AP_3B$ **[キ]** $\angle AP_2B$ である。また，

$\angle AP_3B < \angle AP_1B < 90°$ より $\sin\angle AP_3B$ **[ク]** $\sin\angle AP_1B$ である。このとき

(△ABP_1 の外接円の半径) **[ケ]** (△ABP_2 の外接円の半径)

であり，R が最小となる△ABPは **[コ]** である。

[カ]，[コ] については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　鈍角三角形　　①　直角三角形　　②　正三角形

③　二等辺三角形　　④　直角二等辺三角形

[キ] ～ [ケ] の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　$<$　　①　$=$　　②　$>$

（次ページに続く。）

(3) **問題２**の考察を振り返って，$h=8$ のとき，△ABP の外接円の半径 R が最小である場合について考える。このとき，$\sin\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，$R=\boxed{\text{ス}}$ である。

3

a を定数とする。実数 x に関する二つの条件 p，q を次のように定める。

p：$-1 \leqq x \leqq 3$

q：$|x-a|>3$

条件 p，q の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$ で表す。

(1)　命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるような a の値の範囲は

$a <$ **アイ** ，　**ウ** $< a$

である。

(2)　$a=$ ウ のとき，$x=$ **エ** は命題「$p \Longrightarrow q$」の反例である。

（次ページに続く。）

(3) 実数 x に関する条件 r を次のように定める。

$r：3<x\leqq 4$

次の [オ] に当てはまるものを，下の⓪〜③のうちから一つ選べ。

$a=1$ のとき，条件「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」は条件 r であるための [オ]。

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない
①　十分条件であるが，必要条件ではない
②　必要十分条件である
③　必要条件でも十分条件でもない

第2講　関数・データの分析

1　a を 4 以上の定数とし，$f(x)=(x-a)(x-4)+4$ とおく。

(1)　2 次関数 $y=f(x)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a^2+\boxed{\text{エ}}\,a$ である。

(2)　2 次関数 $y=f(x)$ の $a-2\leqq x\leqq a+2$ における最大値は $\boxed{\text{オ}}\,a$ である。

また，2 次関数 $y=f(x)$ の $a-2\leqq x\leqq a+2$ におる最小値は

$4\leqq a\leqq\boxed{\text{カ}}$ のとき，$\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a^2+\boxed{\text{エ}}\,a$ であり，

$\boxed{\text{カ}}<a$ のとき，$\boxed{\text{キク}}\,a+\boxed{\text{ケコ}}$ である。

２　花子さんと太郎さんのクラスでは，文化祭でたこ焼き店を出店することになった。二人は１皿あたりの価格をいくらにするかを検討している。次の表は，過去の文化祭でのたこ焼き店の売り上げデータから，１皿あたりの価格と売り上げ数の関係をまとめたものである。

１皿あたりの価格(円)	200	250	300
売り上げ数(皿)	200	150	100

(1)　まず，二人は，上の表から，１皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考えて，売り上げ数が１皿あたりの価格の１次関数で表されると仮定した。このとき，１皿あたりの価格を x 円とおくと，売り上げ数は

アイウ $-x$　……………①

と表される。

(2)　次に，二人は，利益の求め方について考えた。

花子：利益は，売り上げ金額から必要な経費を引けば求められるよ。
太郎：売り上げ金額は，１皿あたりの価格と売り上げ数の積で求まるね。
花子：必要な経費は，たこ焼き用器具の賃貸料と材料費の合計だね。材料費は，売り上げ数と１皿あたりの材料費の積になるね。

(次ページに続く。)

二人は，次の三つの条件のもとで，1 皿あたりの価格 x を用いて利益を表すことにした。

（条件 1）　1 皿あたりの価格が x 円のときの売り上げ数として①を用いる。

（条件 2）　材料は，①により得られる売り上げ数に必要な分量だけ仕入れる。

（条件 3）　1 皿あたりの材料費は 160 円である。たこ焼き用器具の賃貸料は 6000 円である。材料費とたこ焼き用器具の賃貸料以外の経費はない。

利益を y 円とおく。y を x の式で表すと

$$y=-x^2+\boxed{\text{エオカ}}\,x-\boxed{\text{キ}}\times 10000 \qquad \cdots\cdots ②$$

である。

(3)　太郎さんは利益を最大にしたいと考えた。②を用いて考えると，利益が最大になるのは 1 皿あたりの価格が $\boxed{\text{クケコ}}$ 円のときであり，そのときの利益は $\boxed{\text{サシスセ}}$ 円である。

(4)　花子さんは，利益を 7500 円以上となるようにしつつ，できるだけ安い価格で提供したいと考えた。②を用いて考えると，利益が 7500 円以上となる 1 皿あたりの価格のうち，最も安い価格は $\boxed{\text{ソタチ}}$ 円となる。

3　総務省が実施している国勢調査では都道府県ごとの総人口が調べられており，その内訳として日本人人口と外国人人口が公表されている。また,外務省では旅券(パスポート）を取得した人数を都道府県ごとに公表している。加えて，文部科学省では都道府県ごとの小学校に在籍する児童数を公表している。

そこで，47 都道府県の，人口１万人あたりの外国人人口（以下，外国人数)，人口１万人あたりの小学校児童数（以下，小学生数)，また，日本人１万人あたりの旅券を取得した人数（以下，旅券取得者数）を，それぞれ計算した。

(次ページに続く。)

(1)　図１は，2010 年における 47 都道府県の，旅券取得者数(横軸)と小学生数(縦軸)の関係を黒丸で，また，旅券取得者数(横軸)と外国人数(縦軸)の関係を白丸で表した散布図である。

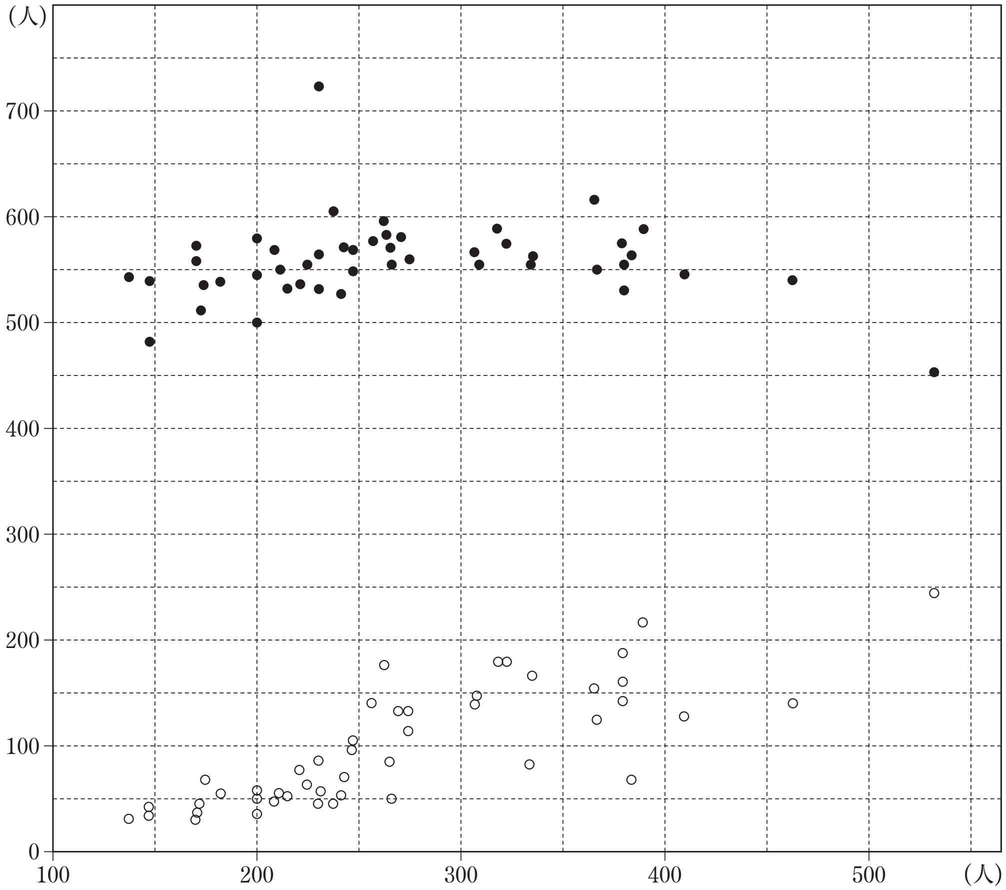


図１　2010 年における，旅券取得者数と小学生数の散布図（黒丸），旅券取得者数と外国人数の散布図（白丸）
（出典：外務省，文部科学省および総務省の Web ページにより作成）

（次ページに続く。）

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は図１の散布図に関する記述である。

(Ⅰ)　小学生数の四分位範囲は，外国人数の四分位範囲より大きい。

(Ⅱ)　旅券取得者数の範囲は，外国人数の範囲より大きい。

(Ⅲ)　旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より大きい。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは **ア** である。

ア の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	誤	正	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	誤	正	誤	正	誤

（次ページに続く。）

(2)　一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	f_3	f_4	$\cdots$	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+\cdots+x_kf_k)$$

で求めることができる。さらに階級の幅が一定で，その値が h のときは

$$x_2=x_1+h,\ x_3=x_1+2h,\ x_4=x_1+3h,\ \cdots,\ x_k=x_1+(k-1)h$$

に注意すると

$$\overline{x}=\boxed{\text{イ}}$$

と変形できる。

［イ］については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{x_1}{n}(f_1+f_2+f_3+f_4+\cdots+f_k)$

① $\dfrac{h}{n}(f_1+2f_2+3f_3+4f_4+\cdots+kf_k)$

② $x_1+\dfrac{h}{n}(f_2+f_3+f_4+\cdots+f_k)$

③ $x_1+\dfrac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots+(k-1)f_k\}$

④ $\dfrac{1}{2}(f_1+f_k)x_1-\dfrac{1}{2}(f_1+kf_k)$

（次ページに続く。）

図2は，2008年における47都道府県の旅券取得者数のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

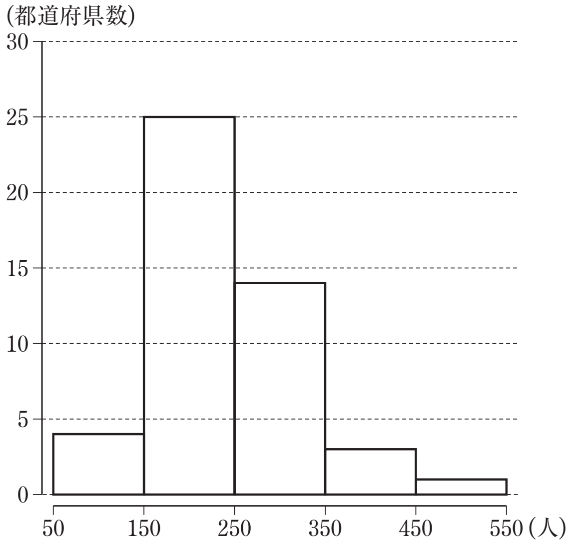


図2　2008年における旅券取得者数のヒストグラム
（出典：外務省のWebページにより作成）

図2のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定する。このとき，平均値 $\overline{x}$ は小数第1位を四捨五入すると **ウエオ** である。

（次ページに続く。）

(3)　一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	$\cdots$	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，分散 s^2 は

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\}$$

で求めることができる。さらに s^2 は

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}\times\boxed{\text{カ}}+(\overline{x})^2\times\boxed{\text{キ}}\right\}$$

と変形できるので

$$s^2=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-\boxed{\text{ク}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

である。

カ ～ ク の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪　n	①　n^2	②　$\overline{x}$	③　$n\overline{x}$	④　$2n\overline{x}$
⑤　$n^2\overline{x}$	⑥　$(\overline{x})^2$	⑦　$n(\overline{x})^2$	⑧　$2n(\overline{x})^2$	⑨　$3n(\overline{x})^2$

（次ページに続く。）

図 3 は，図 2 を再掲したヒストグラムである。

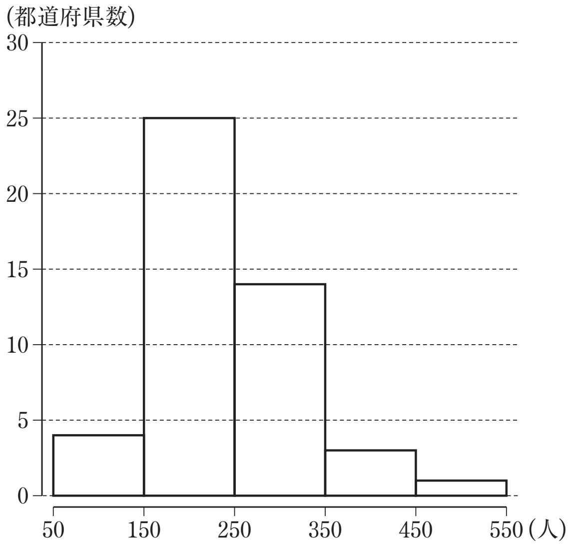


図 3　2008 年における旅券取得者数のヒストグラム
（出典：外務省の Web ページにより作成）

図 3 のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は(2)で求めた ［ウエオ］ である。［ウエオ］ の値と式①を用いると，分散 s^2 は **［ケ］** である。

［ケ］ については，最も近いものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪　3900	①　4900	②　5900	③　6900
④　7900	⑤　8900	⑥　9900	⑦　10900

第３講　場合の数と確率

1　つぼの中に6個の赤玉と4個の白玉の合計10個の玉が入っている。このつぼから，玉を1個ずつ10回続けて取り出す。ただし，一度取り出した玉はもとに戻さないものとする。

(1)　1回目と2回目に連続して赤玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　i を2から9までの整数とし，i 回目と $(i+1)$ 回目に連続して赤玉が取り出される確率 p_i を考える。同じ色の玉は区別しない場合，10個すべての玉の取り出し方は，取り出した玉を1列に並べる並べ方の総数に等しく，$\boxed{ウエオ}$ 通りである。それらのうち，8回目の取り出しを終えた時点で白玉がすべて取り出されている取り出し方は $\boxed{カキ}$ 通りである。よって，p_9 の値は $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。また，p_3 の値は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

(3)　4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出されている確率は $\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セソ}}$ である。よって，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出されていたとき，1回目と2回目に連続して赤玉が取り出されている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

（次ページに続く。）

(4)　4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出されていたとき，9回目と10回目に連続して赤玉が取り出される条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌネ}}}$ である。

(5)　つぼからまず3個の玉を同時に取り出して，玉の色は確認せずに印をつけてつぼに戻したのち，改めて玉を1個ずつ10回続けて取り出す。一度取り出した玉はもとに戻さない。9回目と10回目に連続して印のついた赤玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ である。

2　二つの袋A，Bと一つの箱がある。Aの袋には赤球2個と白球1個が入っており，Bの袋には赤球3個と白球1個が入っている。また，箱には何も入っていない。

(1)　A，Bの袋から球をそれぞれ1個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の2個の球のうち少なくとも1個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を1個取り出すとき，取り出した球が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ であり，取り出した球が赤球であったときに，それがBの袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

（次ページに続く。）

(2)　A，B の袋から球をそれぞれ 2 個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i)　箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 2 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

また，箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 3 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である。

(ii)　箱の中をよくかき混ぜてから球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}$ である。また，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，それらのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌ}}$ である。

第４講　整数の性質

1

(1)　不定方程式

$7x-31y=1$　　　　……………①

を満たす自然数 x, y の組の中で，x が最小のものは

$x=$ ア ，　$y=$ イ

であり，不定方程式①のすべての整数解は，k を整数として

$x=$ ウエ $k+$ ア ，　$y=$ オ $k+$ イ

と表せる。

（次ページに続く。）

(2)　自然数 n に対し，n^2 を [オ] で割った余りが [イ] となるのは，n を [オ] で割った余りが，**[カ]** または **[キ]** のときである。ただし，[カ]，[キ] の解答の順序は問わない。

(3)　不定方程式①の整数解 y のうち，ある自然数 n を用いて $y=n^2$ と表せるものを小さい方から四つ並べると

[ク]，**[ケコ]**，**[サシス]**，**[セソタ]**

である。

(4)　$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数であるような自然数 x のうち，$x \geqq 1000$ を満たす最小のものは **[チツテト]** である。x が [チツテト] のとき，$\sqrt{31(7x-1)}$ の値は **[ナニヌ]** である。

2　正の整数 m に対して

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\ a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0 \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす整数 a，b，c，d の組がいくつあるかを考える。

(1)　$m=14$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

([ア], [イ], [ウ], [エ])

のただ一つである。

また，$m=28$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数は [オ] 個である。

(2)　a が奇数のとき，整数 n を用いて $a=2n+1$ と表すことができる。このとき，$n(n+1)$ は偶数であるから，次の条件がすべての奇数 a で成り立つような正の整数 h のうち，最大のものは $h=$ [カ] である。

条件：a^2-1 は h の倍数である。

よって，a が奇数のとき，a^2 を [カ] で割ったときの余りは1である。

また，a が偶数のとき，a^2 を [カ] で割ったときの余りは，0または4のいずれかである。

（次ページに続く。）

(3)　(2)により，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が [カ] の倍数ならば，整数 a，b，c，d のうち，偶数であるものの個数は [キ] 個である。

(4)　(3)を用いることにより，m が [カ] の倍数であるとき，①を満たす整数 a，b，c，d が求めやすくなる。

例えば，$m=224$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

([クケ]，[コ]，[サ]，[シ])

のただ一つであることがわかる。

(5)　7の倍数で896の約数である正の整数 m のうち，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が [オ] 個であるものの個数は [ス] 個であり，そのうち最大のものは $m=$ [セソタ] である。

第５講　図形の性質

1　△PBD の辺 PB 上に 2 点 P，B のいずれとも異なる点 A をとり，辺 PD 上に 2 点 P，D のいずれとも異なる点 C をとる。4 点 A，B，C，D が同一円周上にあり，AB＝2，PC＝2，PD＝12 のとき，PA＝［ア］である。

点 M を線分 AB の中点とし，点 N を線分 CD の中点とする。線分 AB を直径とする円と線分 CD を直径とする円が点 E で接していて，3 点 M，E，N が一直線上にこの順に並んでいるとする。このとき

$$\mathrm{MN}=\boxed{\text{イ}},\quad \mathrm{PE}=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

である。また

$$\cos\angle\mathrm{MPN}=\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$$

である。

（次ページに続く。）

　線分 PN 上に点 F を直線 MF と直線 PN が垂直に交わるようにとり，線分 PM 上に点 G を直線 NG と直線 PM が垂直に交わるようにとる。このとき

$$\mathrm{PF}=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \mathrm{PG}=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。さらに，線分 MF と線分 NG の交点を J とする。このとき

$$\mathrm{JE}=\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

である。

2　点 Z を端点とする半直線 ZX と半直線 ZY があり，$0° < \angle XZY < 90°$ とする。また，$0° < \angle SZX < \angle XZY$ かつ $0° < \angle SZY < \angle XZY$ を満たす点 S をとる。点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円を作図したい。

円 O を，次の (Step 1)〜(Step 5) の**手順**で作図する。

手順

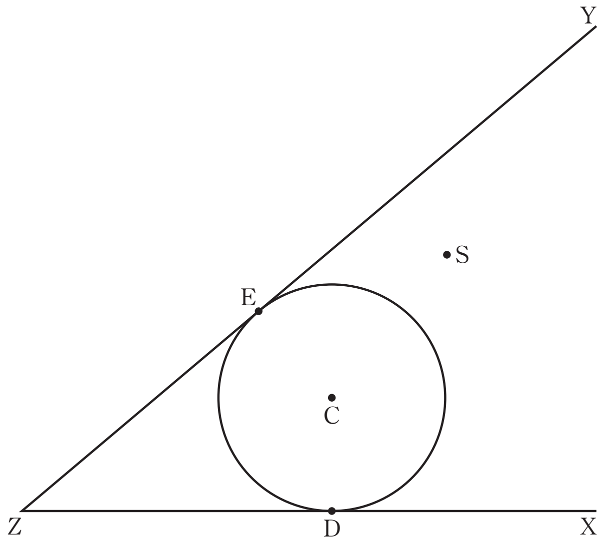
(Step 1)　$\angle XZY$ の二等分線 ℓ 上に点 C をとり，下図のように半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円 C を作図する。また，円 C と半直線 ZX との接点を D，半直線 ZY との接点を E とする。

(Step 2)　円 C と直線 ZS との交点の一つを G とする。

(Step 3)　半直線 ZX 上に点 H を $DG /\!/ HS$ を満たすようにとる。

(Step 4)　点 H を通り，半直線 ZX に垂直な直線を引き，ℓ との交点を O とする。

(Step 5)　点 O を中心とする半径 OH の円 O をかく。



参考図

（次ページに続く。）

(1)　(Step 1)～(Step 5) の**手順**で作図した円 O が求める円であることは，次の**構想**に基づいて下のように説明できる。

構想

円 O が点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円であることを示すには，OH＝［ア］が成り立つことを示せばよい。

作図の**手順**より，△ZDG と △ZHS との関係，および △ZDC と △ZHO との関係に着目すると

DG：［イ］＝［ウ］：［エ］

DC：［オ］＝［ウ］：［エ］

であるから，DG：［イ］＝DC：［オ］となる。

ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，∠CDG＝∠［カ］であるので，△CDG と△［カ］との関係に着目すると，CD＝CG より OH＝［ア］であることがわかる。

なお，3 点 S，O，H が一直線上にある場合は，DG＝［キ］DC となり，DG：［イ］＝DC：［オ］より OH＝［ア］であることがわかる。

［ア］～［オ］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ DH	① HO	② HS	③ OD	④ OG
⑤ OS	⑥ ZD	⑦ ZH	⑧ ZO	⑨ ZS

［カ］の解答群

⓪ OHD	① OHG	② OHS	③ ZDS
④ ZHG	⑤ ZHS	⑥ ZOS	⑦ ZCG

（次ページに続く。）

(2)　点Sを通り，半直線ZXと半直線ZYの両方に接する円は二つ作図できる。特に，点Sが∠XZYの二等分線ℓ上にある場合を考える。半径が大きい方の円の中心をO_1とし，半径が小さい方の円の中心をO_2とする。また，円O_2と半直線ZYが接する点をIとする。円O_1と半直線ZYが接する点をJとし，円O_1と半直線ZXが接する点をKとする。

作図をした結果，円O_1の半径は5，円O_2の半径は3であったとする。このとき，IJ＝$\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$である。さらに，円$O_1$と円$O_2$の接点Sにおける共通接線と半直線ZYとの交点をLとし，直線LKと円O_1との交点で点Kとは異なる点をMとすると

$$\mathrm{LM}\cdot\mathrm{LK}=\boxed{\text{サシ}}$$

である。

また，ZI＝$\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}$であるので，直線LKと直線$\ell$との交点をNとすると

$$\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{NK}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \mathrm{SN}=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

テキスト解答

【講義問題の略解】

※動画講義の内容を補完するものです。記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません。ご了承ください。

第１講　式と計算・図形と計量

1 [1] $(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})=19^2-(5\sqrt{13})^2=361-325=36$

$(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})>0$，$19+5\sqrt{13}>0$ より，$19-5\sqrt{13}>0$

$\alpha=+\sqrt{19+5\sqrt{13}}$，$\beta=+\sqrt{19-5\sqrt{13}}$ とすると

$$\alpha^2+\beta^2=(19+5\sqrt{13})+(19-5\sqrt{13})=38$$

$$\alpha\beta=\sqrt{19+5\sqrt{13}}\sqrt{19-5\sqrt{13}}$$

$$=\sqrt{(19+5\sqrt{13})(19-5\sqrt{13})}=\sqrt{36}=6$$

であり

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=38+2\cdot6=50$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=38-2\cdot6=26$$

である。$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha>\beta$ より

$\alpha+\beta=+\sqrt{50}=5\sqrt{2}$　……①，$\alpha-\beta=+\sqrt{26}$　……②

したがって

(①＋②)÷2 より $\alpha=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{26}}{2}$　　(①－②)÷2 より $\beta=\dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{26}}{2}$

[2] $|ax-b-7|<3$　……①より $-3<ax-b-7<3$

よって $b+4<ax<b+10$　……①′

(1) $a=-3$，$b=-2$ のとき，①′ より $2<-3x<8$　　$-\dfrac{8}{3}<x<-\dfrac{2}{3}$

よって，①を満たす整数全体の集合 P は　　$P=\{-2,\ -1\}$

(2) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，①′ より $\sqrt{2}(b+4)<x<\sqrt{2}(b+10)$　……①″

$\sqrt{2}b+4\sqrt{2}<x<\sqrt{2}b+10\sqrt{2}$

(i) $b=1$ のとき，①″ より $5\sqrt{2}<x<11\sqrt{2} \iff \sqrt{50}<x<\sqrt{242}$

よって，①を満たす整数 x は $x=8$，9，……，15 の $15-8+1=8$ (個)

(ii) ①を満たす整数が $8+1=9$ 個であるような正の整数 b を考える。

$b=2$ のとき，①″ より $6\sqrt{2}<x<12\sqrt{2} \iff \sqrt{72}<x<\sqrt{288}$

よって，①を満たす整数 x は $x=9$，10，……，16 の $16-9+1=8$ (個)

$b=3$ のとき，①″ より $7\sqrt{2}<x<13\sqrt{2} \iff \sqrt{98}<x<\sqrt{338}$

よって，①を満たす整数 x は $x=10$，11，……，18 の $18-10+1=9$ (個)

よって①を満たす整数が $8+1=9$ 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは 3

2 (1)　△ABP で正弦定理より

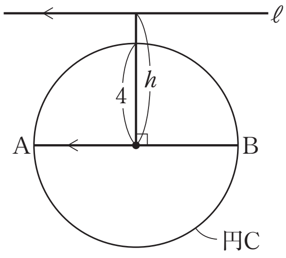
$$2R=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}=\frac{8}{\sin\angle\mathrm{APB}}$$

よって，R が最小となるのは $\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となるときであり，

$0^\circ<\angle\mathrm{APB}<180^\circ$ より，$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ のときである。

このとき，$R=\dfrac{8}{2\sin 90^\circ}=4$

(2)　円 C の半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=4$ より



直線 ℓ が円 C と

共通点をもつのは　$h\leqq 4$

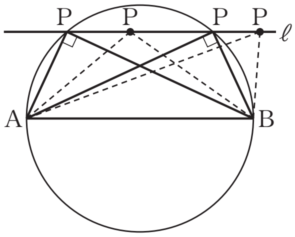
共有点をもたないのは　$h>4$

のときである。

(1)より，R が最小となるのは $\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となるときであり，点 P が直線 ℓ 上にあるという条件のもとで $\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となるときを考える。

(i)　$h\leqq 4$ のとき

$h<4$ のとき



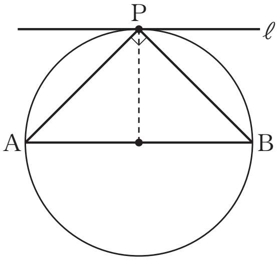
点 P が直線 ℓ と円 C の交点と一致するとき，

$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ となり，$\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となる。

このとき，R が最小となる △ABP は

直角三角形（①）

$h=4$ のとき

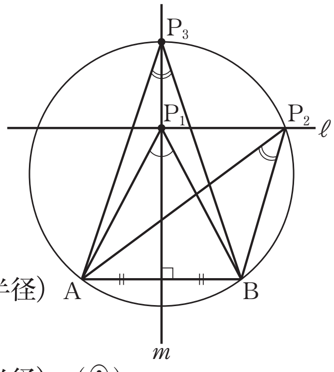


点 P が接線 ℓ と円 C の接点と一致するとき，

$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ となり，$\sin\angle\mathrm{APB}$ が最大となる。

このとき，R が最小となる △ABP は直角二等辺三角形

(ii)　$h>4$ のとき



円周角の定理より，$\angle\mathrm{AP_3B}=\angle\mathrm{AP_2B}$

（①）

また，$\angle\mathrm{AP_3B}<\angle\mathrm{AP_1B}<90^\circ$ より

$\sin\angle\mathrm{AP_3B}<\sin\angle\mathrm{AP_1B}$

（⓪）

このとき

（$\triangle\mathrm{ABP_1}$ の外接円の半径）<（$\triangle\mathrm{ABP_3}$ の外接円の半径）

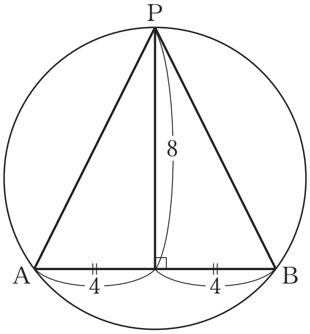
すなわち

（$\triangle\mathrm{ABP_1}$ の外接円の半径）<（$\triangle\mathrm{ABP_2}$ の外接円の半径）　（⓪）

したがって，R が最小となるのは，点 P が点 P_1 と一致するときで，

このとき △ABP は二等辺三角形　（③）

(3)　$h=8$ のとき，△ABP の外接円の半径 R が最小となるのは，点 P が(2)の点 P_1 と一致するときである。



$PA=PB=4\sqrt{5}$ であることから，

△ABP の面積について

$$\frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{5})\cdot(4\sqrt{5})\cdot\sin\angle APB=\frac{1}{2}\cdot8\cdot8$$

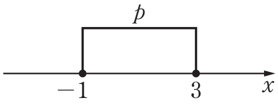
よって，$\sin\angle APB=\dfrac{4}{5}$

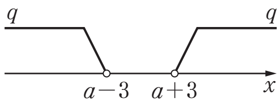
このとき，$R=\dfrac{8}{2\sin\angle APB}=\dfrac{8}{2\cdot\dfrac{4}{5}}=5$

3　$|x-a|>3$ より，

$x-a<-3$，$3<x-a$

よって，q：$x<a-3$，$a+3<x$

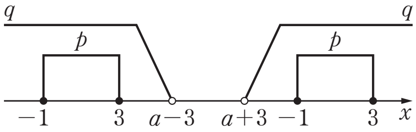




(1)　命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるような a の値の範囲は

$a+3<-1$　または　$3<a-3$

よって，$a<-4$，$6<a$



(2)　$a=6$ のとき

q：$x<3$，$9<x$

よって，$x=3$ は命題「$p \Longrightarrow q$」の反例

(3)　p：$-1\leqq x\leqq3$ より，$\overline{p}$：$x<-1$，$3<x$

$a=1$ のとき

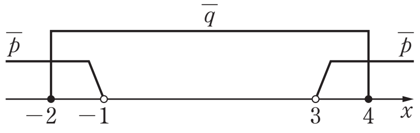
q：$x<-2$，$4<x$

よって　$\overline{q}$：$-2\leqq x\leqq4$

よって，$\overline{p}$かつ$\overline{q}$：$-2\leqq x<-1$，$3<x\leqq4$

したがって，条件「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」は，

r：$3<x\leqq4$ であるための必要条件であるが，十分条件ではない（⓪）



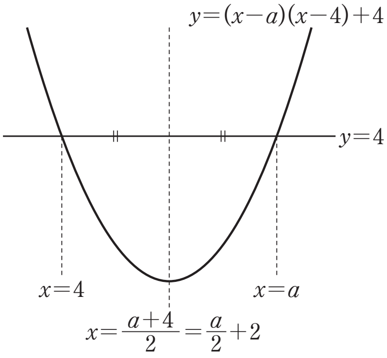
第２講　関数・データの分析

1　(1)　$f(x)=(x-a)(x-4)+4=x^2-(a+4)x+4a+4$

$$=\left(x-\frac{a+4}{2}\right)^2-\frac{(a+4)^2}{4}+4a+4$$

$$=\left(x-\frac{a+4}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+2a$$

よって，$y=f(x)$ の最小値は　$f\left(\frac{a+4}{2}\right)=\frac{-1}{4}a^2+2a$



（参考）　右図より $y=f(x)$ の最小値は

$$f\left(\frac{a}{2}+2\right)$$

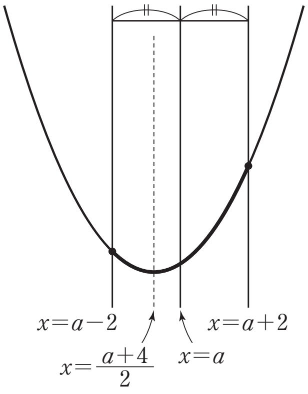
$$=\left\{\left(\frac{a}{2}+2\right)-a\right\}\left\{\left(\frac{a}{2}+2\right)-4\right\}+4$$

$$=-\left(\frac{a}{2}-2\right)^2+4$$

$$=-\frac{1}{4}a^2+2a$$

(2)　変域 $a-2\leqq x\leqq a+2$ の中央 $x=a$ とグラフの軸 $x=\frac{a+4}{2}$ について

$$a-\frac{a+4}{2}=\frac{a-4}{2}\geqq 0\quad(\because\ a\geqq 4)$$



よって，$a\geqq\frac{a+4}{2}$ すなわち（変域の中央）≧（グラフの軸）

したがって，2 次関数 $y=f(x)$ の $a-2\leqq x\leqq a+2$ における最大値は

$$f(a+2)=\{(a+2)-a\}\{(a+2)-4\}+4$$
$$=2(a-2)+4$$
$$=2a$$

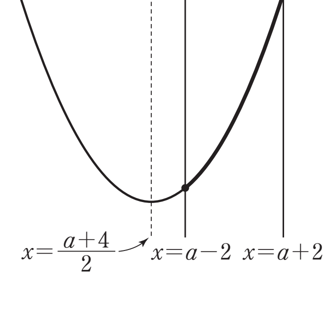
最小値は

$a-2\leqq\frac{a+4}{2}$ つまり $4\leqq a\leqq 8$ のとき

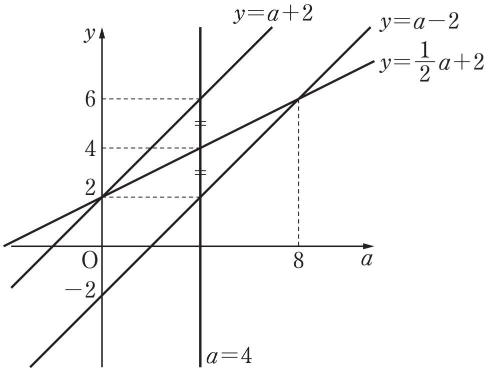
$$f\left(\frac{a+4}{2}\right)=-\frac{1}{4}a^2+2a$$

$\frac{a+4}{2}<a-2$ つまり $8<a$ のとき

$$f(a-2)=\{(a-2)-a\}\{(a-2)-4\}+4$$
$$=-2(a-6)+4$$
$$=-2a+16$$



（参考）



2 (1)　1 皿あたりの価格を x 円，売り上げ数を s 皿とし，s は x の 1 次関数と仮定する。

x が 50 増えると s が 50 減るので，$s=\frac{-50}{50}x+b$ すなわち $s=-x+b$

と表される。

表より，$b=s+x=400$

したがって，売り上げ数 s は

$s=-x+400=400-x$

(2)　(利益)＝(売り上げ金額)－(必要な経費)

（売り上げ金額）＝(1 皿あたりの価格)×(売り上げ数)

（必要な経費）＝(器具の賃貸料)＋(材料費)

（材料費）＝(1 皿あたりの材料費)×(売り上げ数)

よって

$y=x(400-x)-\{6000+160(400-x)\}$

$=-x^2+560x-70000$

$=-x^2+560x-7\times10000$

(3)　$y=-(x-280)^2+8400$ より，利益 y が最大になるのは 1 皿あたりの価格が $x=280$ (円) のときであり，そのときの利益は $y=8400$ (円) である。

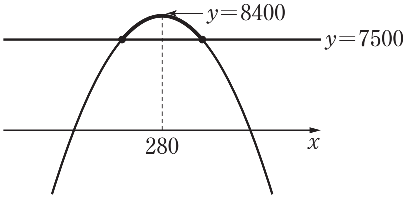
(4)　利益が 7500 円以上より，$y\geqq7500$

$-(x-280)^2+8400\geqq7500$

$(x-280)^2\leqq900$

$-30\leqq x-280\leqq30$　　よって　$250\leqq x\leqq310$

したがって，利益が 7500 円以上となる 1 皿あたりの価格のうち，最も安い価格は $x=250$ (円)



3 (1)　(I)について

四分位範囲は第 3 四分位数(人数の多い方から 12 番目の県の人数)から第 1 四分位数(人数の少ない方から 12 番目の県の人数)を引いたものである。

縦軸から黒丸および白丸の表す人数を読み取ると，小学生数の四分位範囲は外国

人数の四分位範囲より小さい。よって，誤り。

(Ⅱ)について

横軸から読み取ると，旅券取得者数の範囲は概算で 530－130＝400（人）

白丸の縦軸から読み取ると，外国人数の範囲は概算で 250－30＝220（人）

よって，旅券取得者の範囲は外国人数の範囲より大きい。よって，正しい。

(Ⅲ)について

白丸の分布の様子を見ると右上がりの傾向，つまり正の相関が見られる一方，黒丸の分布には傾向が見られない。よって，旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より小さい。よって，誤り。

以上より，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは　(⑤)

(2)　$\overline{x}=\dfrac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+\cdots\cdots+x_kf_k)$

$=\dfrac{1}{n}[x_1f_1+(x_1+h)f_2+(x_1+2h)f_3+(x_1+3h)f_4+\cdots\cdots+\{x_1+(k-1)h\}f_k]$

$=\dfrac{1}{n}[x_1(f_1+f_2+f_3+f_4+\cdots\cdots+f_k)+h\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}]$

$=\dfrac{1}{n}\cdot x_1\cdot n+\dfrac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}$

$=x_1+\dfrac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}$　(③)

図２のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，階級値およびその値を取る度数は次の表となる。

階級値	100	200	300	400	500	計
度数	4	25	14	3	1	47

$\overline{x}=x_1+\dfrac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots\cdots+(k-1)f_k\}$

$=100+\dfrac{100}{47}(25+2\cdot 14+3\cdot 3+4\cdot 1)$

$=100+\dfrac{6600}{47}$

$=240.4\cdots\cdots$

小数第１位を四捨五入すると，求める平均値 $\overline{x}$ は 240

(3)　$s^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\}$

$=\dfrac{1}{n}[\{x_1{}^2-2x_1\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_1+\{x_2{}^2-2x_2\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_2+\cdots\cdots$

$+\{x_k{}^2-2x_k\overline{x}+(\overline{x})^2\}f_k]$

$=\dfrac{1}{n}\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}(x_1f_1+x_2f_2+\cdots\cdots+x_kf_k)$

$+(\overline{x})^2\times(f_1+f_2+\cdots\cdots+f_k)\}$

$$=\frac{1}{n}\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}\times n\overline{x}+(\overline{x})^2\times n\}$$

（③）　（⓪）

$$=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-(\overline{x})^2$$　（⑥）

図 3（図 2）のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，(2)より $\overline{x}=240$ であり，分散 s^2 は

$$s^2=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots\cdots+x_k{}^2f_k)-(\overline{x})^2$$

$$=\frac{1}{47}(100^2\cdot 4+200^2\cdot 25+300^2\cdot 14+400^2\cdot 3+500^2\cdot 1)-240^2$$

$$=\frac{100^2}{47}(4+100+126+48+25)-240^2$$

$$=\frac{100^2}{47}\cdot 303-240^2$$

$$=6868.0\cdots\cdots$$

この値に最も近いものは，6900　（③）

第３講　場合の数と確率

1 (1)　1 回目と 2 回目に連続して赤玉が取り出される確率は

$$\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

(2)　同じ色の玉は区別しない場合，10 個の玉の取り出し方は，10 個の玉を 1 列に並べる並べ方の総数と等しく

$$\frac{10!}{6!4!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!4!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210\ (\text{通り})$$

これは，1 回目から 10 回目のうち白玉が取り出される 4 回を選ぶ ${}_{10}C_4$ 通りと同じであり，残りの 6 回は赤玉である（${}_6C_6=1$ 通り）。

このうち，8 回目の取り出しを終えた時点で白玉がすべて取り出されているのは，1 回目から 8 回目までに白玉が 4 個，赤玉が 4 個取り出され，9 回目と 10 回目に残りの赤玉が取り出される場合である。1 回目から 8 回目の 8 回のうち，白玉 4 個が取り出される 4 回を選ぶ選び方は ${}_8C_4$ 通りで，残りはすべて区別のできない赤玉である。

1 回目　2 回目　……　8 回目	9 回目	10 回目
赤 4 個　白 4 個	赤	赤

よって，求める場合の数は ${}_8C_4=70$（通り）

p_9 は 9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出される確率である。9 回目と 10 回目に連続して赤玉が取り出されるのは，8 回目の取り出しを終えた時点で白玉がすべて取り出されている場合のみであり，その取り出し方は 70 通りである。したがって，

$$p_9=\frac{70}{210}=\frac{1}{3}$$

p_3 は 3 回目と 4 回目に連続して赤玉が取り出される確率である。3 回目と 4 回目に連続して赤玉が取り出されるのは，1，2 回目および 5 回目～10 回目までの 8 回のうち，白玉が 4 回取り出される場合で，その取り出し方は ${}_8C_4=70$（通り）である。

3 回目	4 回目	1 回目　2 回目　5 回目　……　10 回目
赤	赤	赤 4 個　白 4 個

したがって，$p_3=\dfrac{1}{3}$

(3)　4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 1 個以下であるのは次の場合

(i)　4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 1 個のみの場合

(ii)　4 回目の取り出しを終えた時点で赤玉が 1 個も取り出されていない場合

(i)と(ii)は互いに排反である。

(i)の場合

1 回目から 4 回目までに赤玉が 1 個，白玉が 3 個取り出され，5 回目から 10 回目

までに赤玉が５個，白玉が１個取り出される場合である。

$$\underbrace{1\text{回目}\quad\cdots\cdots\quad 4\text{回目}}_{\underline{\text{赤}1\text{個}}\quad\text{白}3\text{個}}\qquad\underbrace{5\text{回目}\quad\cdots\cdots\quad 10\text{回目}}_{\text{赤}5\text{個}\quad\text{白}1\text{個}}$$

その取り出し方は，１回目から４回目が ${}_4C_1$ 通り，５回目から10回目が ${}_6C_1$ 通り。

したがって，４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が１個のみの場合の確率は

$$\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{210}=\frac{24}{210}\left(=\frac{12}{105}\right)$$

(ii)の場合

１回目から４回目までに白玉が４個取り出され，５回目から10回目までに赤玉が６個取り出される場合である。

$$\underbrace{1\text{回目}\quad\cdots\cdots\quad 4\text{回目}}_{\text{白}4\text{個}}\qquad\underbrace{5\text{回目}\quad\cdots\cdots\quad 10\text{回目}}_{\text{赤}6\text{個}}$$

その取り出し方は $1\times1=1$（通り）

したがって，４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が１個も取り出されていない場合の確率は $\dfrac{1}{210}$

４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が２個以上取り出されている場合は，(i)または(ii)の余事象である。よってその確率は

$$1-\left(\frac{24}{210}+\frac{1}{210}\right)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$$

１回目と２回目に連続して赤玉が取り出されている（かつ４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が２個以上取り出されている）確率は，(1)より $\dfrac{1}{3}$

よって，４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が２個以上取り出されていたとき，１回目と２回目に連続して赤玉が取り出されている条件付き確率は

$$\frac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{37}{42}}=\frac{14}{37}$$

(4)　４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が２個以上取り出され，かつ９回目と10回目に連続して赤玉が取り出されるのは次の場合

(i)　４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が２個のみ取り出され，かつ９回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合

(ii)　４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が３個のみ取り出され，かつ９回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合

(iii)　４回目の取り出しを終えた時点で赤玉が４個取り出され，かつ９回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合

(i)～(iii)は互いに排反である。

(i)の場合

1回目から4回目までに赤玉が2個，白玉が2個取り出され，5回目から8回目までに赤玉が2個，白玉が2個取り出され，9回目と10回目に赤玉が取り出される場合である。

1回目　……　4回目　　5回目　……　8回目　　9回目　10回目
赤2個　白2個　　赤2個　白2個　　赤　赤

その取り出し方は，1回目から4回目が ${}_4C_2$ 通り，5回目から8回目が ${}_4C_2$ 通り。したがって，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個のみ取り出され，かつ9回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{{}_4C_2\times{}_4C_2}{210}=\frac{36}{210}\left(=\frac{6}{35}\right)$$

(ii)の場合

1回目から4回目までに赤玉が3個，白玉が1個取り出され，5回目から8回目までに赤玉が1個，白玉が3個取り出され，9回目と10回目に赤玉が取り出される場合である。

1回目　……　4回目　　5回目　……　8回目　　9回目　10回目
赤3個　白1個　　赤1個　白3個　　赤　赤

その取り出し方は，1回目から4回目が ${}_4C_1$ 通り，5回目から8回目が ${}_4C_1$ 通り。したがって，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が3個のみ取り出され，かつ9回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{{}_4C_1\times{}_4C_1}{210}=\frac{16}{210}\left(=\frac{8}{105}\right)$$

(iii)の場合

1回目から4回目までに赤玉が4個取り出され，5回目から8回目までに白玉が4個取り出され，9回目と10回目に赤玉が取り出される場合である。

1回目　……　4回目　　5回目　……　8回目　　9回目　10回目
赤4個　　白4個　　赤　赤

その取り出し方は，$1\times1=1$（通り）

したがって，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が4個取り出され，かつ9回目と10回目に連続して赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{1}{210}$$

(i)～(iii)より，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出され，かつ9

回目と10回目に連続して赤玉が取り出される確率は

$$\frac{36}{210}+\frac{16}{210}+\frac{1}{210}=\frac{53}{210}$$

よって，4回目の取り出しを終えた時点で赤玉が2個以上取り出されていたとき，9回目と10回目に連続して赤玉が取り出される条件付き確率は

$$\frac{\frac{53}{210}}{\frac{37}{42}}=\frac{53}{185}$$

(5)　9回目と10回目に連続して印のついた赤玉が取り出されるためには，印をつけた3個の玉のうち少なくとも2個は赤玉である必要がある。よって，以下の場合を考える。

(i)　つぼから赤玉2個と白玉1個を取り出して，印をつけてつぼに戻したのち，1回目から8回目までに印のついた赤玉が1個も取り出されず，9回目と10回目に連続して印のついた赤玉が取り出される場合

(ii)　つぼから赤玉3個を取り出して，印をつけてつぼに戻したのち，1回目から8回目までに印のついた赤玉が1個のみ取り出され，9回目と10回目に連続して印のついた赤玉が取り出される場合

(i)と(ii)は互いに排反である。

(i)の場合

つぼから赤玉2個と白玉1個を取り出す確率は $\dfrac{{}_6C_2\times{}_4C_1}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{2}$

この3個の玉に印をつけてつぼに戻した後，つぼの中には印のついた赤玉が2個と，その他の玉が8個入っている。その他の玉を区別しないとすると，印のついた赤玉2個とその他の玉8個の合計10個の玉を取り出す場合は ${}_{10}C_2$ 通りである。

1回目　……　10回目

印のついた赤玉　2個
その他の玉　8個

また，9回目と10回目に連続して印のついた赤玉を取り出し，1回目から8回目までにその他の玉を取り出す場合は $1\times1=1$（通り）である。

1回目　……　8回目　　9回目　10回目

その他の玉　8個　　㊔　㊔（印あり）

この場合の確率は $\dfrac{1}{{}_{10}C_2}=\dfrac{1}{45}$

したがって，つぼから赤玉2個と白玉1個を取り出して，印をつけてつぼに戻し

たのち，1 回目から 8 回目までに印のついた赤玉が 1 個も取り出されず，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{45}=\frac{1}{90}$$

(ii)の場合

つぼから赤玉 3 個を取り出す確率は $\dfrac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{6}$

この 3 個の玉に印をつけてつぼに戻した後，つぼの中には印のついた赤玉が 3 個と，その他の玉が 7 個入っている。その他の玉を区別しないとすると，印のついた赤玉 3 個とその他の玉 7 個の合計 10 個の玉の取り出し方は ${}_{10}C_3$ 通りである。

1 回目　……　10 回目

印のついた赤玉　3 個
その他の玉　7 個

また，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉を取り出し，1 回目から 8 回目までに印のついた赤玉 1 個とその他の玉 7 個を取り出す場合は ${}_8C_1$ 通りである。

1 回目　……　8 回目　　9 回目　10 回目

印のついた赤玉　1 個　　㊟赤　㊟赤
その他の玉　7 個　　↖ 印あり ↗

この場合の確率は $\dfrac{{}_8C_1}{{}_{10}C_3}=\dfrac{1}{15}$

　したがって，つぼから赤玉 3 個を取り出して，印をつけてつぼに戻したのち，1 回目から 8 回目までに印のついた赤玉が 1 個のみ取り出され，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される場合の確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{90}$$

(i)，(ii)より，9 回目と 10 回目に連続して印のついた赤玉が取り出される確率は

$$\frac{1}{90}+\frac{1}{90}=\frac{1}{45}$$

2　袋 A：赤球 2 個，白球 1 個　　袋 B：赤球 3 個，白球 1 個

(1)　(i)「箱の中の 2 個の球のうち少なくとも 1 個が赤球である」事象は，「箱の中の 2 個の球がともに白球である」事象の余事象である。よって，求める確率は

$$1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$$

(ii)　箱の中から赤球が取り出されるのは，次の場合

①　袋 A から赤球，袋 B から赤球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出

す場合

この場合の確率は　$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times 1=\frac{1}{2}$

②　袋Ａから赤球，袋Ｂから白球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は　$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

③　袋Ａから白球，袋Ｂから赤球を取り出して箱に入れ，箱から赤球を取り出す場合

この場合の確率は　$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

①〜③は互いに排反であるから，箱の中から赤球が取り出される確率は

$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{17}{24}$

取り出された球が赤球であり，かつそれがＢの袋に入っていたものであるのは，①において箱から取り出された赤玉がＢの袋に入っていたものである場合と，③の場合であり，その確率は $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ である。

したがって，取り出された球が赤球であったときに，それがＢの袋に入っていたものである条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{17}{24}}=\frac{9}{17}$$

(2)　Ａの袋から球を２個取り出したとき

２個とも赤球である確率は $\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$　　赤球と白球１個ずつである確率は $\frac{2}{3}$

Ｂの袋から球を２個取り出したとき

２個とも赤球である確率は $\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$　　赤球と白球１個ずつである確率は $\frac{1}{2}$

(i)　箱の中の４個の球のうち，ちょうど２個が赤球であるのは

Ａ，Ｂの袋からそれぞれ赤球と白球を１個ずつ取り出す場合　……①

のみである。よって，その確率は $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

箱の中の４個の球のうち，ちょうど３個が赤球であるのは

・Ａの袋から赤球を２個，Ｂの袋から赤球と白球を１個ずつ取り出す場合　……②

・Ａの袋から赤球と白球を１個ずつ，Ｂの袋から赤球を２個取り出す場合　……③

のいずれかである。よって，その確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

また，箱の中の４個の球が，４個とも赤球であるのは

A，B の袋からそれぞれ赤球を 2 個取り出す場合　……④

のみであり，その確率は $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)　箱の中から球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は，箱の中の 4 個の球のうち

ちょうど 2 個が赤球であるとき　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

ちょうど 3 個が赤球であるとき　$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

4 個とも赤球であるとき　$\frac{1}{6}\times1=\frac{1}{6}$

したがって，箱の中から球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\frac{1}{18}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{17}{36}$

また，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であり，かつそのうちの 1 個のみが B の袋(もう 1 個は A の袋)に入っていたものである確率は

①のとき　$\frac{1}{3}\times\frac{1\times1}{{}_4C_2}=\frac{1}{18}$　　②のとき　$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times1}{{}_4C_2}=\frac{1}{18}$

③のとき　$\frac{1}{3}\times\frac{1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{9}$　　④のとき　$\frac{1}{6}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{9}$

よって，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であり，かつそのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである確率は

$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$

したがって，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，そのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{17}{36}}=\frac{12}{17}$$

第４講　整数の性質

1 (1) $7x-31y=1$ ……① $\Longleftrightarrow$ $7x=31y+1$ は，y が最小のとき x も最小となる。

$y=1$ のとき　$7x=32$　　これを満たす自然数 x はない

$y=2$ のとき　$7x=63$　　$x=9$

したがって，①を満たす自然数 x，y の組の中で，x が最小のものは

$x=9$，$y=2$

よって，不定方程式①の解の１つが $x=9$，$y=2$ であるから

$7\cdot9-31\cdot2=1$ ……②

が成立する。①－②より

$7(x-9)-31(y-2)=0$　　つまり　$7(x-9)=31(y-2)$

7 と31は互いに素であるから，$x-9$は31の倍数である。よって，整数 k を用いて

$x-9=31k$

と表される。したがって，不定方程式①のすべての整数解は，整数 k を用いて

$x=31k+9$，$y=7k+2$

と表される。

(2) 自然数 n を 7 で割った余りを r ($r=0$，1，2，……，6) とすると，n は整数 m を用いて

$n=7m+r$

と表される。このとき

$n^2=(7m+r)^2$

$=49m^2+14mr+r^2$

$=7(7m^2+2mr)+r^2$

よって，n^2 を 7 で割った余りは，r^2 を 7 で割った余りと一致する。

$r^2=0$，1，4，9，16，25，36

であることから，n^2 を 7 で割った余りが 2 になるのは，r^2 を 7 で割った余りが 2 になるとき，すなわち　$r=3$，4 のときである。

したがって，自然数 n に対し，n^2 を 7 で割った余りが 2 となるのは，n を 7 で割った余りが 3 または 4 のときである。

(参考)

$n=7k\pm1$ のとき　$n^2=(7k\pm1)^2=49k^2\pm14k+1=7(7k^2\pm2k)+1$

$n=7k\pm2$ のとき　$n^2=(7k\pm2)^2=49k^2\pm28k+4=7(7k^2\pm4k)+4$

$n=7k\pm3$ のとき　$n^2=(7k\pm3)^2=49k^2\pm42k+9=7(7k^2\pm6k+1)+2$

(3) 不定方程式①の整数解 y は，(1)より整数 k を用いて $y=7k+2$ と表される。つまり，y を 7 で割ると余りが 2 である。

この整数 y が，自然数 n を用いて $y=n^2$ と表されるとき，(2)より n を 7 で割った余りが 3 または 4 である。そのような自然数 n を小さい方から四つ並べると

$n=3,\ 4,\ 10,\ 11$

である。このとき，n^2 すなわち y は小さい方から順に 9，16，100，121 である。

(4) $\sqrt{31(7x-1)}$ が整数となるのは，$7x-1$ が整数 y，n^2を用いて

$7x-1=31y\quad(y=n^2)$

と表されるときである。

$7x-1=31y$ は，不定方程式①と一致し，その解は(1)より整数 k を用いて

$x=31k+9,\ y=7k+2$

と表される。また，$y=n^2$ と表されるとき，(2)より n を 7 で割った余りが 3 または 4 である。

$x\geqq1000$ より，$31k+9\geqq1000$　　$k\geqq\dfrac{991}{31}=31.9\cdots\cdots$　　よって，$k\geqq32$

このとき，$y=7k+2\geqq7\cdot32+2=226$

また，$y=n^2$ を満たす自然数 n は，小さい方より $n=3,\ 4,\ 10,\ 11,\ 17,\ \cdots\cdots$ であり，n^2 すなわち y は小さい方から順に 9，16，100，121，289，…… である。

よって，$y\geqq226$ かつ $y=n^2$ を満たす最小の自然数 y は $y=289$

このとき $7k+2=289$ より $k=41$ であり，$x=31k+9=31\cdot41+9=1280$

したがって，$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数となるような自然数 x のうち，$x\geqq1000$ を満たす最小のものは $x=1280$ である。

このとき，$\sqrt{31(7x-1)}=\sqrt{31\cdot31y}=\sqrt{31^2\cdot n^2}=\sqrt{31^2\cdot17^2}=31\cdot17=527$

2 $a^2+b^2+c^2+d^2=m,\ a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq0$　……①

(1) $m=14$ のとき

$a^2+b^2+c^2+d^2=14$

$a\geqq4$ のとき，$a^2\geqq16>14$ であるから，$a\leqq3$

$a=3$ のとき　$b^2+c^2+d^2=5$

これを満たす整数 $b,\ c,\ d\ (b\geqq c\geqq d\geqq0)$ の組は，$(b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 0)$ のみ

$a\leqq2$ のとき　$a^2+b^2+c^2+d^2=14$ を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d\ (a\geqq b\geqq c\geqq d)$ の組はない。

したがって，$m=14$ のとき，①を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組は

$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 2,\ 1,\ 0)$

のただ一つである。

$m=28$ のとき

$a^2+b^2+c^2+d^2=28$

$a\geqq6$ のとき，$a^2\geqq36>28$ であるから，$a\leqq5$

$a=5$ のとき　$b^2+c^2+d^2=3$

これを満たす整数 $b,\ c,\ d\ (b\geqq c\geqq d\geqq0)$ の組は，$(b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 1)$ のみ

$a=4$ のとき　$b^2+c^2+d^2=12$

これを満たす整数 b，c，d $(b \geqq c \geqq d \geqq 0)$ の組は，$(b,\ c,\ d)=(2,\ 2,\ 2)$ のみ

$a=3$ のとき　$b^2+c^2+d^2=19$

これを満たす整数 b，c，d $(b \geqq c \geqq d \geqq 0)$ の組は，$(b,\ c,\ d)=(3,\ 3,\ 1)$ のみ

$a \leqq 2$ のとき　$a^2+b^2+c^2+d^2=28$ を満たす整数 a，b，c，d $(a \geqq b \geqq c \geqq d)$ の組はない。

したがって，$m=28$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組は

$(a,\ b,\ c,\ d)=(5,\ 1,\ 1,\ 1)$，$(4,\ 2,\ 2,\ 2)$，$(3,\ 3,\ 3,\ 1)$

の 3 個である。

(2)　a が奇数のとき，$a=2n+1$ (n は整数) と表され

$a^2-1=(a+1)(a-1)=(2n+2)\cdot 2n=4n(n+1)$

$n(n+1)$ は連続 2 整数の積，すなわち偶数であるから，$4n(n+1)$ は 8 の倍数である。

よって，a^2-1 が h の倍数であることがすべての奇数 a で成り立つとき，正の整数 h の最大値は $h=8$ である。

よって，a が奇数のとき，a^2-1 を 8 で割ったときの余りは 0 であるから，a^2 を 8 で割った余りは 1 である。

また，a が偶数のとき，$a=2m$ (m は整数) と表され

$a^2=(2m)^2=4m^2$

を 8 で割ったときの余りは，0 (m^2 が偶数のとき) または 4 (m^2 が奇数のとき) である。

(3)　(2)より

整数 a が奇数のとき　a^2 を 8 で割ったときの余りは 1

整数 a が偶数のとき　a^2 を 8 で割ったときの余りは 0 か 4

である。

$a^2+b^2+c^2+d^2$ が 8 の倍数ならば，a^2，b^2，c^2，d^2 をそれぞれ 8 で割ったときの余りの和が 8 の倍数(0 含む)である。ここで(2)の結果より，整数 a，b，c，d のうち 1 つでも奇数であるならば，a^2，b^2，c^2，d^2 をそれぞれ 8 で割ったときの余りの和が 8 の倍数になることはない。したがって，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が 8 の倍数ならば，整数 a，b，c，d のうち，偶数であるものの個数は 4 個，つまり a，b，c，d はすべて偶数である。

(4)　$m=224=8\cdot 28$，つまり　8 の倍数のとき

①，すなわち $a^2+b^2+c^2+d^2=224$，$a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$ を満たす整数 a，b，c，d はすべて偶数であるので

$a=2a_1$，$b=2b_1$，$c=2c_1$，$d=2d_1$ (a_1，b_1，c_1，d_1 は $a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \geqq d_1 \geqq 0$ を満たす整数)とおくことができる。このとき

$(2a_1)^2+(2b_1)^2+(2c_1)^2+(2d_1)^2=224$

${a_1}^2+{b_1}^2+{c_1}^2+{d_1}^2=56=8\cdot 7$

同様に，$a_1=2a_2$，$b_1=2b_2$，$c_1=2c_2$，$d_1=2d_2$ (a_2，b_2，c_2，d_2 は $a_2 \geqq b_2 \geqq c_2 \geqq d_2 \geqq 0$ を満たす整数)とおくことができ

$(2a_2)^2+(2b_2)^2+(2c_2)^2+(2d_2)^2=56$

$a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2=14$

これを満たす a_2，b_2，c_2，d_2 は⑴より $(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2)=(3,\ 2,\ 1,\ 0)$ のただ一つである。

したがって，$m=224$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$(a,\ b,\ c,\ d)=(4a_2,\ 4b_2,\ 4c_2,\ 4d_2)=(12,\ 8,\ 4,\ 0)$

のただ一つである。

⑸　7 の倍数で $896=7\cdot 2^7$ の約数である正の整数 m は

$m=7,\ 2\cdot 7,\ 2^2\cdot 7,\ 2^3\cdot 7,\ 2^4\cdot 7,\ 2^5\cdot 7,\ 2^6\cdot 7,\ 2^7\cdot 7$

の 8 個であり，これらの m に関して，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が 3 個であるものの個数を求める。⑴より，$m=2\cdot 7=14$ は満たさず，$m=2^2\cdot 7=28$ は満たす。

ここで，$m=2^3\cdot 7,\ 2^4\cdot 7,\ 2^5\cdot 7,\ 2^6\cdot 7,\ 2^7\cdot 7$ は 8 の倍数であるから，⑶を用いることによりそれぞれ，$m=2\cdot 7,\ 2^2\cdot 7,\ 2\cdot 7,\ 2^2\cdot 7,\ 2\cdot 7$ として考えることができる。

また，$m=7$ のとき

$a^2+b^2+c^2+d^2=7,\ a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$

を満たす整数 a，b，c，d の組は，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 1,\ 1)$ のみ（1 組）である。

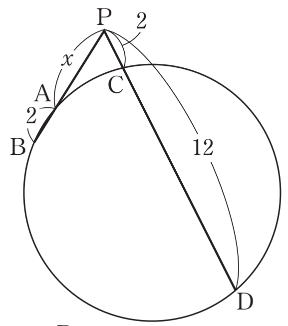
以上より，7 の倍数で 896 の約数である正の整数 m のうち，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が 3 個であるものは，$m=2^2\cdot 7,\ 2^4\cdot 7,\ 2^6\cdot 7$ の 3 個であり，そのうち最大のものは $m=2^6\cdot 7=448$ である。

第５講　図形の性質

1　PA＝x とおくと，方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
$$x(x+2) = 2 \cdot 12$$
$$x^2 + 2x - 24 = 0$$
$$(x+6)(x-4) = 0 \qquad x = -6,\ 4$$

よって，PA＝4



線分 AB を直径とする円(中心は点 M)と線分 CD を直径とする円(中心は点 N)が点 E で接しているので，

(2 円の中心間の距離)＝(2 円の半径の和)

であることから

$$MN = 1 + 5 = 6$$

また，方べきの定理より

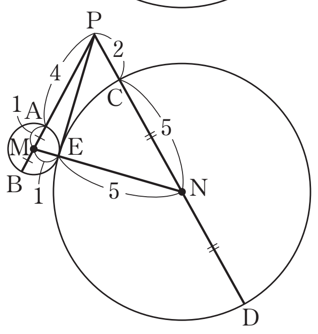
$$PA \cdot PB = PE^2$$
$$PE^2 = 4 \cdot (4+2) = 24$$

よって，PE＝$2\sqrt{6}$

(このとき $PM^2 = ME^2 + PE^2$ が成立するので，$\angle PEM = \angle PEN = 90^\circ$)

また，△MNP で余弦定理より

$$\cos\angle MPN = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{19}{35}$$



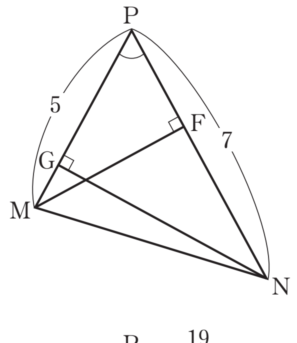
直角三角形 MPF で

$$PF = PM\cos\angle MPN = 5 \cdot \frac{19}{35} = \frac{19}{7}$$

直角三角形 GPN で

$$PG = PN\cos\angle MPN = 7 \cdot \frac{19}{35} = \frac{19}{5}$$

よって，$FN = 7 - \frac{19}{7} = \frac{30}{7}$，$GM = 5 - \frac{19}{5} = \frac{6}{5}$ より



$$\frac{PG}{GM} \cdot \frac{ME}{EN} \cdot \frac{NF}{FP} = \frac{19}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{30}{19} = 1$$

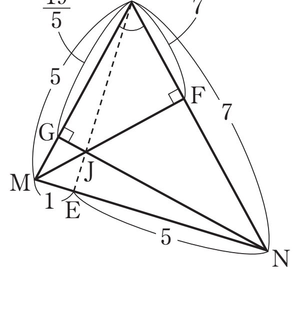
が成り立つ。

したがって，チェバの定理の逆より，3 直線 MF，NG，PE が 1 点 J で交わる。

(点 J は △PMN の垂心である)

メネラウスの定理より

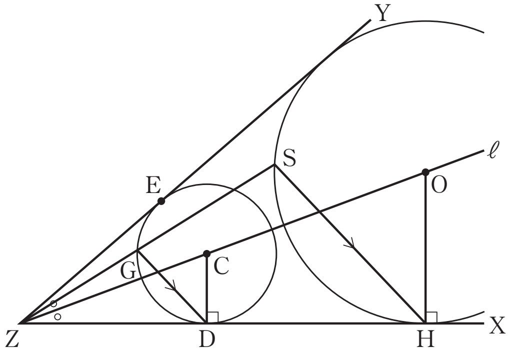
$$\frac{NM}{ME} \cdot \frac{EJ}{JP} \cdot \frac{PF}{FN} = 1$$



$\dfrac{6}{1}\cdot\dfrac{JE}{PJ}\cdot\dfrac{19}{30}=1$　　よって，$\dfrac{JE}{PJ}=\dfrac{5}{19}$

したがって，$JE=\dfrac{5}{24}PE=\dfrac{5}{24}\cdot 2\sqrt{6}=\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$

2 (1)　OH＝OS（⑤）を示せばよい。



作図の手順より

△ZDG∽△ZHSであるから

DG：HS＝ZD：ZH

（②）（⑥）（⑦）

△ZDC∽△ZHO であるから

DC：HO＝ZD：ZH

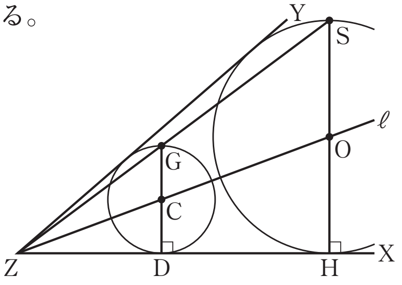
（①）

よって，DG：HS＝DC：HO

ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，∠CDG＝∠OHS（②）であるので，

△CDG∽△OHS である。

よって，CD＝CG より OH＝OS であることがわかる。

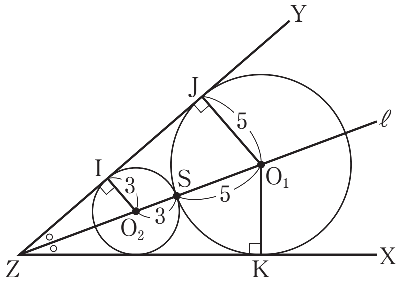


なお，3 点 S，O，H が一直線上にある場合は，

DG＝2DC となり，DG：HS＝DC：HO より

OH＝OS であることがわかる。

(2)



三平方の定理より　$IJ=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$

方べきの定理より　$LM\cdot LK=LS^2$

ここで，LI＝LS＝LJ より

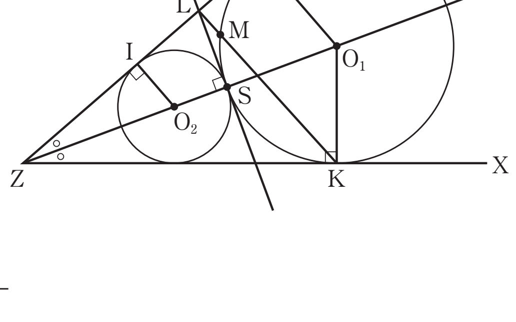
$LS=\dfrac{1}{2}IJ=\sqrt{15}$

したがって，$LM\cdot LK=(\sqrt{15})^2=15$

また，$\triangle ZO_2I\backsim\triangle ZO_1J$ より，

$ZI：ZJ=O_2I：O_1J$

ZI＝x とおくと，$x：(x+2\sqrt{15})=3：5$



$x=3\sqrt{15}$　　　よって，$\mathrm{ZI}=3\sqrt{15}$

角の二等分線の性質より

$$\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{NK}}=\frac{\mathrm{ZL}}{\mathrm{ZK}}=\frac{\mathrm{ZL}}{\mathrm{ZJ}}=\frac{\mathrm{ZI}+\mathrm{IL}}{\mathrm{ZI}+\mathrm{IL}+\mathrm{LJ}}=\frac{3\sqrt{15}+\sqrt{15}}{3\sqrt{15}+\sqrt{15}+\sqrt{15}}=\frac{4\sqrt{15}}{5\sqrt{15}}=\frac{4}{5}$$

直角三角形 ZLS で

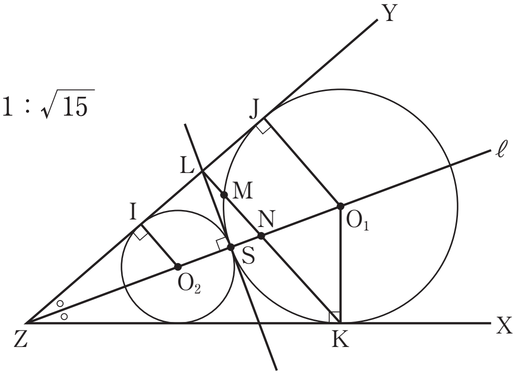
$\mathrm{ZL}:\mathrm{LS}=4\sqrt{15}:\sqrt{15}=4:1$ より

$\mathrm{ZL}:\mathrm{LS}:\mathrm{ZS}=4:1:\sqrt{4^2-1^2}=4:1:\sqrt{15}$

よって，$\mathrm{ZS}=\sqrt{15}\,\mathrm{LS}=15$

また，点 K から直線 ℓ に垂線を下ろし，直線 ℓ との交点を P とすると

$\triangle\mathrm{LSN}\backsim\triangle\mathrm{KPN}$ であることから，



$$\mathrm{KP}=\frac{5}{4}\mathrm{LS}=\frac{5\sqrt{15}}{4}$$

直角三角形 ZKP で

$\mathrm{ZK}:\mathrm{KP}=5\sqrt{15}:\frac{5}{4}\sqrt{15}=4:1$ より

$\mathrm{ZK}:\mathrm{KP}:\mathrm{ZP}=4:1:\sqrt{15}$　　よって，$\mathrm{ZP}=\sqrt{15}\,\mathrm{KP}=\frac{75}{4}$

したがって，$\mathrm{SP}=\mathrm{ZP}-\mathrm{ZS}=\frac{75}{4}-15=\frac{15}{4}$

ゆえに，$\mathrm{SN}=\frac{4}{4+5}\mathrm{SP}=\frac{4}{9}\cdot\frac{15}{4}=\frac{5}{3}$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。